



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.

510.5

A 673

A r c h i v

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern
Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,
Professor zu Greifswald.

Erster Theil.

Mit vier lithographirten Tafeln und zwei Holzschnitten.

Greifswald.

Verlag von C. A. Koch.

1841.

●

-

.....

.....

,

.

.

zugleich aber auch:

$$\begin{aligned}
 12. \quad & 4a^2 = \delta_2^2 + \delta_3^2 - 2\delta_2\delta_3 \cos(\delta_{2,3}), \\
 & 4T_a^2 = A_2^2 + A_3^2 - 2A_2A_3 \cos(A_{2,3}) \\
 & 4a_1^2 = \delta_2^2 + \delta_3^2 + 2\delta_2\delta_3 \cos(\delta_{2,3}), \\
 & 4T_{a_1}^2 = A_2^2 + A_3^2 + 2A_2A_3 \cos(A_{2,3}) \\
 & p\delta_1 = 2A_2A_3 \sin(A_{2,3}) \quad A_1 = \frac{1}{2}\delta_2\delta_3 \sin(\delta_{2,3})
 \end{aligned}$$

ferner wird:

$$\begin{aligned}
 13. \quad & T_a^2 = T_b^2 + T_c^2 + 2T_bT_c \cos(T_{bc}) \\
 & \quad = T_{b_1}^2 + T_{c_1}^2 + 2T_{b_1}T_{c_1} \cos(T_{b_1c_1}) \\
 & T_a^2 = T_{b_1}^2 + T_{c_1}^2 + 2T_{b_1}T_{c_1} \cos(T_{b_1c_1}) \\
 & \quad = T_b^2 + T_c^2 + 2T_bT_c \cos(T_{bc}) \\
 & a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(bc) = b_1^2 + c_1^2 - 2b_1c_1 \cos(b_1c_1) \\
 & a_1^2 = b_1^2 + c_1^2 - 2b_1c_1 \cos(b_1c_1) = b^2 + c^2 - 2bc \cos(bc) \\
 & \frac{1}{2}p^2 = 4T_aT_b \sin(T_{a,b}) = 4T_aT_{b_1} \sin(T_{a,b_1}) \\
 & \quad = 4T_bT_{b_1} \sin(T_{b,b_1}) \\
 14. \quad & 2T_a = ab \sin(ab) = ac \sin(ac) = bc \sin(bc)
 \end{aligned}$$

Man führe zur Abkürzung folgende Zeichen ein:

$$\begin{aligned}
 15. \quad & \mu^2 = \frac{(T_1 + T_2 + T_3 - T_4)(T_1 + T_2 - T_3 + T_4)}{(T_1 - T_2 + T_3 + T_4)(-T_1 + T_2 + T_3 + T_4)} - 8T_1T_2T_3T_4 \\
 & \varpi_a^2 = \frac{(T_b + T_{b_1} + T_c - T_{c_1})(T_b + T_{b_1} - T_c + T_{c_1})}{(T_b - T_{b_1} + T_c + T_{c_1})(-T_b + T_{b_1} + T_c + T_{c_1})} - 8T_bT_{b_1}T_cT_{c_1} \\
 & \Pi^2 = \frac{(A_1 + A_2 + A_3)(A_1 + A_2 - A_3)(A_1 - A_2 + A_3)}{(-A_1 + A_2 + A_3)} \\
 & \eta^2 = \frac{(t_1 + t_2 + t_3 - t_4)(t_1 + t_2 - t_3 + t_4)(t_1 - t_2 + t_3 + t_4)}{(-t_1 + t_2 + t_3 + t_4)} - 8t_1t_2t_3t_4 \\
 & \varphi_a^2 = \frac{(b + b_1 + c - c_1)(b + b_1 - c + c_1)(b - b_1 + c + c_1)}{(-b + b_1 + c + c_1)} - 8bb_1cc_1 \\
 & \pi^2 = (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)(\delta_1 + \delta_2 - \delta_3)(\delta_1 - \delta_2 + \delta_3)(-\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)
 \end{aligned}$$

so wird

$$\begin{aligned}
 16. \quad & \mu^2 = P^2(a \pm a_1)^2 + 8T_1T_2T_3T_4 \cos(12 \pm 34) \\
 & \quad = P^2\{a^2 + a_1^2 + 2aa_1 \cot(12) \cot(34)\} \\
 & \varpi_a^2 = \frac{1}{4}P^2(\delta_2 \mp \delta_3)^2 - 8T_bT_{b_1}T_cT_{c_1} \cos(T_{bb_1} \pm T_{cc_1}) \\
 & \quad = \frac{1}{4}P^2\{\delta_2^2 + \delta_3^2 - 2\delta_2\delta_3 \cot(T_{bb_1}) \cot(T_{cc_1})\} \\
 & \Pi^2 = P^2(\delta_1^2 \mp 4aa_1) - 16T_1T_2T_3T_4 \cos(12 \pm 34) \\
 & \quad = P^2\{\delta_1^2 - 4aa_1 \cot(12) \cot(34)\} \\
 & \frac{9^2}{16^2} \eta^2 = 4(T_a \pm T_{a_1})^2 + \frac{9^2}{16^2} \cdot 8t_1t_2t_3t_4 \cos(t_{1,2} \pm t_{3,4}) \\
 & \quad = 4\{T_a^2 + T_{a_1}^2 + 2T_aT_{a_1} \cot(t_{1,2}) \cot(t_{3,4})\} \\
 & \varphi_a^2 = 4^2(A_2 \mp A_3)^2 - 8bb_1cc_1 \cos(bb_1 \pm cc_1) \\
 & \quad = 4^2\{A_2^2 + A_3^2 - 2A_2A_3 \cot(bb_1) \cot(cc_1)\} \\
 & \frac{1}{8^2} \pi^2 = (A_1^2 \mp 4T_aT_{a_1}) - \frac{9^2}{16^2} 8t_1t_2t_3t_4 \cos(t_{1,2} \pm t_{3,4}) \\
 & \quad = A_1^2 - 4T_aT_{a_1} \cot(t_{1,2}) \cot(t_{3,4})
 \end{aligned}$$

$$p + q = \sqrt{\mu}, \quad p - q = \pm \sqrt{-\mu - 2\left(a + \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)}$$

oder

$$p + q = -\sqrt{\mu}, \quad p - q = \pm \sqrt{-\mu - 2\left(a - \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)};$$

also entweder

$$2p = \sqrt{\mu} \pm \sqrt{-\mu - 2\left(a + \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)}, \quad 2q = \sqrt{\mu} \mp \sqrt{-\mu - 2\left(a + \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)}$$

oder

$$2p = -\sqrt{\mu} \pm \sqrt{-\mu - 2\left(a - \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)}, \quad 2q = -\sqrt{\mu} \mp \sqrt{-\mu - 2\left(a - \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)}.$$

Aus den Gleichungen 14. ergibt sich ganz ebenso respective

$$2r = -\sqrt{\mu} \pm \sqrt{-\mu - 2\left(a - \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)}, \quad 2s = -\sqrt{\mu} \mp \sqrt{-\mu - 2\left(a - \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)}$$

oder

$$2r = \sqrt{\mu} \pm \sqrt{-\mu - 2\left(a + \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)}, \quad 2s = \sqrt{\mu} \mp \sqrt{-\mu - 2\left(a + \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)}.$$

Also sind die doppelten Wurzeln unserer Gleichung des vierten Grades entweder

$$2p = \sqrt{\mu} \pm \sqrt{-\mu - 2\left(a + \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)},$$

$$2q = \sqrt{\mu} \mp \sqrt{-\mu - 2\left(a + \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)},$$

$$2r = -\sqrt{\mu} \pm \sqrt{-\mu - 2\left(a - \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)},$$

$$2s = -\sqrt{\mu} \mp \sqrt{-\mu - 2\left(a - \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)};$$

oder

$$2p = -\sqrt{\mu} \pm \sqrt{-\mu - 2\left(a - \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)},$$

$$2q = -\sqrt{\mu} \mp \sqrt{-\mu - 2\left(a - \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)},$$

$$2r = \sqrt{\mu} \pm \sqrt{-\mu - 2\left(a + \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)},$$

$$2s = \sqrt{\mu} \mp \sqrt{-\mu - 2\left(a + \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)}.$$

Da nun aber das zweite System von dem ersten offenbar nicht verschieden ist, so sind die doppelten Wurzeln

$$2p = \sqrt{\mu} \pm \sqrt{-\mu - 2\left(a + \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)},$$

$$2q = \sqrt{\mu} \mp \sqrt{-\mu - 2\left(a + \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)},$$

$$2r = -\sqrt{\mu} \pm \sqrt{-\mu - 2\left(a - \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)},$$

$$2s = -\sqrt{\mu} \mp \sqrt{-\mu - 2\left(a - \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)}.$$

Da auch die obere und untere Vorzeichen in diesen Formeln nicht zwei verschiedene Systeme von Wurzeln, und die doppelten Wurzeln unserer Gleichung sind also

$$2p = \sqrt{\mu} + \sqrt{-\mu - 2\left(\alpha + \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)},$$

$$2q = \sqrt{\mu} - \sqrt{-\mu - 2\left(\alpha + \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)},$$

$$2r = -\sqrt{\mu} + \sqrt{-\mu - 2\left(\alpha - \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)},$$

$$2s = -\sqrt{\mu} - \sqrt{-\mu - 2\left(\alpha - \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)}.$$

Folglich sind die vier Wurzeln unserer gegebenen Gleichung des vierten Grades

$$p = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\mu} + \sqrt{-\mu - 2\left(\alpha + \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)}\right\},$$

$$q = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\mu} - \sqrt{-\mu - 2\left(\alpha + \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)}\right\},$$

$$r = -\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\mu} - \sqrt{-\mu - 2\left(\alpha - \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)}\right\},$$

$$s = -\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\mu} + \sqrt{-\mu - 2\left(\alpha - \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)}\right\}.$$

Weil jede cubische Gleichung bekanntlich mindestens eine reelle Wurzel hat, so kann man immer annehmen, dass μ eine reelle Grösse ist.

V.

Ueber die Bestimmung der Anzahl der zwischen gegebenen Gränzen liegenden reellen oder imaginären Wurzeln der algebraischen Gleichungen.

Nach einer Abhandlung des Herrn Abbé Moigno in dem Journal de Mathématiques pures et appliquées, publié par Joseph Liouville. Février 1840. p. 75. frei bearbeitet von dem

Herausgeber.

A.

Einige vorbereitende Sätze von den ganzen rationalen algebraischen Functionen und von den Gleichungen.

§. 1.

Erklärung. Wenn man jedes Glied einer ganzen rationalen algebraischen Function der veränderlichen Grösse x mit dem

• **2-2-27-28**

YES.

22

: 73B-

1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025, 2026, 2027, 2028, 2029, 2030, 2031, 2032, 2033, 2034, 2035, 2036, 2037, 2038, 2039, 2040, 2041, 2042, 2043, 2044, 2045, 2046, 2047, 2048, 2049, 2050, 2051, 2052, 2053, 2054, 2055, 2056, 2057, 2058, 2059, 2060, 2061, 2062, 2063, 2064, 2065, 2066, 2067, 2068, 2069, 2070, 2071, 2072, 2073, 2074, 2075, 2076, 2077, 2078, 2079, 2080, 2081, 2082, 2083, 2084, 2085, 2086, 2087, 2088, 2089, 2090, 2091, 2092, 2093, 2094, 2095, 2096, 2097, 2098, 2099, 2100, 2101, 2102, 2103, 2104, 2105, 2106, 2107, 2108, 2109, 2110, 2111, 2112, 2113, 2114, 2115, 2116, 2117, 2118, 2119, 2120, 2121, 2122, 2123, 2124, 2125, 2126, 2127, 2128, 2129, 2130, 2131, 2132, 2133, 2134, 2135, 2136, 2137, 2138, 2139, 2140, 2141, 2142, 2143, 2144, 2145, 2146, 2147, 2148, 2149, 2150, 2151, 2152, 2153, 2154, 2155, 2156, 2157, 2158, 2159, 2160, 2161, 2162, 2163, 2164, 2165, 2166, 2167, 2168, 2169, 2170, 2171, 2172, 2173, 2174, 2175, 2176, 2177, 2178, 2179, 2180, 2181, 2182, 2183, 2184, 2185, 2186, 2187, 2188, 2189, 2190, 2191, 2192, 2193, 2194, 2195, 2196, 2197, 2198, 2199, 2200, 2201, 2202, 2203, 2204, 2205, 2206, 2207, 2208, 2209, 2210, 2211, 2212, 2213, 2214, 2215, 2216, 2217, 2218, 2219, 2220, 2221, 2222, 2223, 2224, 2225, 2226, 2227, 2228, 2229, 2230, 2231, 2232, 2233, 2234, 2235, 2236, 2237, 2238, 2239, 2240, 2241, 2242, 2243, 2244, 2245, 2246, 2247, 2248, 2249, 2250, 2251, 2252, 2253, 2254, 2255, 2256, 2257, 2258, 2259, 2260, 2261, 2262, 2263, 2264, 2265, 2266, 2267, 2268, 2269, 2270, 2271, 2272, 2273, 2274, 2275, 2276, 2277, 2278, 2279, 2280, 2281, 2282, 2283, 2284, 2285, 2286, 2287, 2288, 2289, 2290, 2291, 2292, 2293, 2294, 2295, 2296, 2297, 2298, 2299, 2300, 2301, 2302, 2303, 2304, 2305, 2306, 2307, 2308, 2309, 2310, 2311, 2312, 2313, 2314, 2315, 2316, 2317, 2318, 2319, 2320, 2321, 2322, 2323, 2324, 2325, 2326, 2327, 2328, 2329, 2330, 2331, 2332, 2333, 2334, 2335, 2336, 2337, 2338, 2339, 2340, 2341, 2342, 2343, 2344, 2345, 2346, 2347, 2348, 2349, 2350, 2351, 2352, 2353, 2354, 2355, 2356, 2357, 2358, 2359, 2360, 2361, 2362, 2363, 2364, 2365, 2366, 2367, 2368, 2369, 2370, 2371, 2372, 2373, 2374, 2375, 2376, 2377, 2378, 2379, 2380, 2381, 2382, 2383, 2384, 2385, 2386, 2387, 2388, 2389, 2390, 2391, 2392, 2393, 2394, 2395, 2396, 2397, 2398, 2399, 2400, 2401, 2402, 2403, 2404, 2405, 2406, 2407, 2408, 2409, 2410, 2411, 2412, 2413, 2414, 2415, 2416, 2417, 2418, 2419, 2420, 2421, 2422, 2423, 2424, 2425, 2426, 2427, 2428, 2429, 2430, 2431, 2432, 2433, 2434, 2435, 2436, 2437, 2438, 2439, 2440, 2441, 2442, 2443, 2444, 2445, 2446, 2447, 2448, 2449, 2450, 2451, 2452, 2453, 2454, 2455, 2456, 2457, 2458, 2459, 2460, 2461, 2462, 2463, 2464, 2465, 2466, 2467, 2468, 2469, 2470, 2471, 2472, 2473, 2474, 2475, 2476, 2477, 2478, 2479, 2480, 2481, 2482, 2483, 2484, 2485, 2486, 2487, 2488, 2489, 2490, 2491, 2492, 2493, 2494, 2495, 2496, 2497, 2498, 2499, 2500, 2501, 2502, 2503, 2504, 2505, 2506, 2507, 2508, 2509, 2510, 2511, 2512, 2513, 2514, 2515, 2516, 2517, 2518, 2519, 2520, 2521, 2522, 2523, 2524, 2525, 2526, 2527, 2528, 2529, 2530, 2531, 2532, 2533, 2534, 2535, 2536, 2537, 2538, 2539, 2540, 2541, 2542, 2543, 2544, 2545, 2546, 2547, 2548, 2549, 2550, 2551, 2552, 2553, 2554, 2555, 2556, 2557, 2558, 2559, 2560, 2561, 2562, 2563, 2564, 2565, 2566, 2567, 2568, 2569, 2570, 2571, 2572, 2573, 2574, 2575, 2576, 2577, 2578, 2579, 2580, 2581, 2582, 2583, 2584, 2585, 2586, 2587, 2588, 2589, 2590, 2591, 2592, 2593, 2594, 2595, 2596, 2597, 2598, 2599, 2600, 2601, 2602, 2603, 2604, 2605, 2606, 2607, 2608, 2609, 2610, 2611, 2612, 2613, 2614, 2615, 2616, 2617, 2618, 2619, 2620, 2621, 2622, 2623, 2624, 2625, 2626, 2627, 2628, 2629, 2630, 2631, 2632, 2633, 2634, 2635, 2636, 2637, 2638, 2639, 2640, 2641, 2642, 2643, 2644, 2645, 2646, 2647, 2648, 2649, 2650, 2651, 2652, 2653, 2654, 2655, 2656, 2657, 2658, 2659, 2660, 2661, 2662, 2663, 2664, 2665, 2666, 2667, 2668, 2669, 2670, 2671, 2672, 2673, 2674, 2675, 2676, 2677, 2678, 2679, 26

—

—

1

1

1

100

- 91

- 1

— 224 —

14 " " " " " "

Setzt man $f(x+i) = \varphi(i)$, so ist nach dem so eben bewiesenen Satze, weil $\varphi(i)$ offenbar eine ganze rationale algebraische Function des n ten Grades von i ist,

$$f(x+i) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1} i + \frac{\varphi''(0)}{1.2} i^2 + \frac{\varphi'''(0)}{1.2.3} i^3 + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{1 \dots n} i^n.$$

Durch successive Anwendung des in §. 11. bewiesenen Satzes erhält man

$$\bullet \quad \varphi(i) = f(x+i),$$

$$\varphi'(i) = f'(x+i),$$

$$\varphi''(i) = f''(x+i),$$

u. s. w.

$$\varphi^{(n)}(i) = f^{(n)}(x+i);$$

und folglich

$$\varphi(0) = f(x), \quad \varphi'(0) = f'(x), \quad \varphi''(0) = f''(x), \quad \dots \quad \varphi^{(n)}(0) = f^{(n)}(x).$$

Also ist nach dem Obigen

$$\text{II. } f(x+i) = f(x) + \frac{f'(x)}{1} i + \frac{f''(x)}{1.2} i^2 + \frac{f'''(x)}{1.2.3} i^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{1 \dots n} i^n,$$

welches ebenfalls eine sehr merkwürdige, und an Folgerungen sehr fruchtbare Formel ist.

§. 13.

Um eine Anwendung der Formel II. in dem vorigen Paragraphen zu zeigen, sei $f(x) = x^n$, wo n eine positive ganze Zahl sein soll, und folglich

$$f(x+i) = (x+i)^n.$$

Weil nun nach der Voraussetzung und nach §. 1.

$$f(x) = x^n,$$

$$f'(x) = nx^{n-1},$$

$$f''(x) = n(n-1) x^{n-2},$$

$$f'''(x) = n(n-1)(n-2) x^{n-3},$$

u. s. w.

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 2.1$$

ist; so ist nach §. 12. II.

$$\begin{aligned} (x+i)^n = x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} i + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} i^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^{n-3} i^3 + \dots \\ \dots + \frac{n(n-1) \dots 2}{1 \dots (n-1)} x i^{n-1} + \frac{n(n-1) \dots 1}{1 \dots n} i^n, \end{aligned}$$

welche Gleichung der analytische Ausdruck des Binomischen Lehrsatzes für positive ganze Exponenten ist.

§. 14.

Unter der Voraussetzung, dass $f(x)$ und $\varphi(x)$ ganze rationale algebraische Functionen sind, wollen wir nun noch das allgemeine Gesetz der höhern derivirten Functionen der ganzen rationalen algebraischen Function

$$F(x) = f(x) \varphi(x)$$

entwickeln.

Wendet man auf diese Function die aus dem Obigen bekannten Regeln zur Entwicklung der derivirten Functionen an, so erhält man nach und nach:

$$F'(x) = f(x) \varphi'(x) + f'(x) \varphi(x),$$

$$F''(x) = f(x) \varphi''(x) + f'(x) \varphi'(x) + f''(x) \varphi(x)$$

$$= f(x) \varphi''(x) + 2f'(x) \varphi'(x) + f''(x) \varphi(x),$$

$$F'''(x) = f(x) \varphi'''(x) + 2f'(x) \varphi''(x) + f''(x) \varphi'(x)$$

$$+ f'(x) \varphi''(x) + 2f''(x) \varphi'(x) + f'''(x) \varphi(x)$$

$$= f(x) \varphi'''(x) + 3f'(x) \varphi''(x) + 3f''(x) \varphi'(x) + f'''(x) \varphi(x),$$

u. s. w.

Ueberlegt man nun, dass

$$x + i = x + i,$$

$$(x + i)^2 = x^2 + xi$$

$$+ xi + i^2$$

$$= x^2 + 2xi + i^2,$$

$$(x + i)^3 = x^3 + 2x^2i + xi^2$$

$$+ x^2i + 2xi^2 + i^3$$

$$= x^3 + 3x^2i + 3xi^2 + i^3,$$

u. s. w.

ist; so wird man sich sogleich überzeugen, dass die numerischen Coefficienten der einzelnen Glieder der Entwicklungen der derivirten Functionen der Function $F(x)$ nach und nach ganz eben so entstehen, wie die numerischen Coefficienten der einzelnen Glieder der Entwicklungen der Potenzen von $x + i$. Daher sind die numerischen Coefficienten der einzelnen Glieder der Entwicklung von $F^{(x)}(x)$ einerlei mit den numerischen Coefficienten der einzelnen Glieder der Entwicklung von $(x + i)^x$, und es ist also nach dem Obigen und nach §. 13. offenbar

$$F^{(x)}(x) = f(x) \varphi^{(x)}(x) + \frac{x}{1} f'(x) \varphi^{(x-1)}(x)$$

$$+ \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} f''(x) \varphi^{(x-2)}(x)$$

$$+ \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(x) \varphi^{(x-3)}(x)$$

u. s. w.

$$+ \frac{x(x-1)(x-2) \dots 2 \cdot 1}{1 \dots x} f^{(x)}(x) \varphi(x).$$

§. 15.

Wenn man in der aus §. 12 bekannten Gleichung

$$f(x+i) = f(x) + \frac{f'(x)}{1} i + \frac{f''(x)}{1 \cdot 2} i^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{1 \dots n} i^n$$

$$\frac{f_1(x)}{f_1'(x)} = A_1 - \frac{f_1''(x)}{f_1'(x)}$$

$$\frac{f_2(x)}{f_2'(x)} = A_2 - \frac{f_2''(x)}{f_2'(x)}$$

$$\frac{f_3(x)}{f_3'(x)} = A_3 - \frac{f_3''(x)}{f_3'(x)}$$

... u.

$$\frac{f_n(x)}{f_n'(x)} = A_n - \frac{f_n''(x)}{f_n'(x)}$$

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_{n+1}'(x)} = A_{n+1} - \frac{f_{n+1}''(x)}{f_{n+1}'(x)}$$

so A_n eine ganze rationale Funktion von x ist.

Bezeichnen wir nun in der ganzen n -ten Ableitung der Funktionen

$$\frac{f_1(x)}{f_1'(x)}, \frac{f_2(x)}{f_2'(x)}, \frac{f_3(x)}{f_3'(x)}, \dots, \frac{f_n(x)}{f_n'(x)}, \frac{f_{n+1}(x)}{f_{n+1}'(x)}$$

respective: durch

$$F_1, F_2, F_3, F_4, \dots, F_n, F_{n+1},$$

so ist nach § II. III.

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n + F_{n+1}$$

wo $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n, F_{n+1}$ gewisse mittels der im I. Abschnitt des vorangehenden Kapitels als völlig bestimmte bestimmten Größen sind. Durch Addition der vorangehenden Gleichungen erhält man hier, wenn man addiert was man addieren darf, nach § II., was

$$\frac{F(x)}{F'(x)} = A_n$$

eine ganze rationale algebraische Funktion ist. $F_n = A_n$ sein muss, sogleich die Gleichung

$$F = A_n + F_{n+1}$$

und sieht aus, dass zur Berechnung des Excesses F nur eine völlig sichere und möglichst einfache Regel zur Bestimmung der Größen $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ erforderlich ist, die wir nun zu geben versuchen wollen.

Zu dem Ende schreiben wir die Werte, welche die Funktionen

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), \dots, f_n(x)$$

für $x=0$ und für $x=i$ erhalten, in zwei Zeilen, wie folgt unter einander:

$$(1) \dots f_1(0), f_2(0), f_3(0), f_4(0), \dots, f_n(0)$$

$$(2) \dots f_1(i), f_2(i), f_3(i), f_4(i), \dots, f_n(i)$$

Betrachten wir nun zunächst irgend eine der Größen A_1, A_2, A_3, \dots , die wir im Allgemeinen durch A_n bezeichnen wollen, so dem Obigen

$$A_n = A_{n+1} + A_n$$

$${}^h m_2 \cdot \frac{n+2k}{p+1} = {}^h m_2 \cdot \frac{n+2k}{3} \cdot \frac{3}{p+1} = {}^h m_2 \cdot \frac{3}{p+1},$$

$${}^h m_1 \cdot \frac{n+k}{p+1} = {}^h m_1 \cdot \frac{n+k}{2} \cdot \frac{2}{p+1} = {}^h m_2 \cdot \frac{2}{p+1},$$

$$\frac{n}{p+1} = \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{p+1} = {}^h m_1 \cdot \frac{1}{p+1},$$

und ganz auf ähnliche Art

$$\frac{n}{p+1} = \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{p+1} = {}^h m_1 \cdot \frac{1}{p+1},$$

$${}^h m_1 \cdot \frac{n+k}{p+1} = {}^h m_1 \cdot \frac{n+k}{2} \cdot \frac{2}{p+1} = {}^h m_2 \cdot \frac{2}{p+1},$$

$${}^h m_2 \cdot \frac{n+2k}{p+1} = {}^h m_2 \cdot \frac{n+2k}{3} \cdot \frac{3}{p+1} = {}^h m_3 \cdot \frac{3}{p+1},$$

u. s. w.

$${}^h m_{p-2} \cdot \frac{n+(p-2)k}{p+1} = {}^h m_{p-2} \cdot \frac{n+(p-2)k}{p-1} \cdot \frac{p-1}{p+1} = {}^h m_{p-1} \cdot \frac{p-1}{p+1},$$

$${}^h m_{p-1} \cdot \frac{n+(p-1)k}{p+1} = {}^h m_{p-1} \cdot \frac{n+(p-1)k}{p} \cdot \frac{p}{p+1} = {}^h m_p \cdot \frac{p}{p+1},$$

$${}^h m_p \cdot \frac{n+pk}{p+1} = {}^h m_p \cdot \frac{n+pk}{p+1} \cdot \frac{p+1}{p+1} = {}^h m_{p+1} \cdot \frac{p+1}{p+1}$$

ist; so ist nach dem Obigen

$$\begin{aligned} F(p) \cdot \frac{n+n+k}{p+1} &= {}^h m_{p+1} \cdot \frac{p+1}{p+1} + {}^h m_p \cdot {}^h m_1 \cdot \frac{1}{p+1} \\ &\quad + {}^h m_p \cdot {}^h m_1 \cdot \frac{p}{p+1} + {}^h m_{p-1} \cdot {}^h m_2 \cdot \frac{2}{p+1} \\ &\quad + {}^h m_{p-1} \cdot {}^h m_2 \cdot \frac{p-1}{p+1} + {}^h m_{p-2} \cdot {}^h m_3 \cdot \frac{3}{p+1} \\ &\quad + {}^h m_{p-2} \cdot {}^h m_3 \cdot \frac{p-2}{p+1} + {}^h m_{p-3} \cdot {}^h m_4 \cdot \frac{4}{p+1} \end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned} &+ {}^h m_3 \cdot {}^h m_{p-2} \cdot \frac{3}{p+1} + {}^h m_2 \cdot {}^h m_{p-1} \cdot \frac{p-1}{p+1} \\ &+ {}^h m_2 \cdot {}^h m_{p-1} \cdot \frac{2}{p+1} + {}^h m_1 \cdot {}^h m_p \cdot \frac{p}{p+1} \\ &+ {}^h m_1 \cdot {}^h m_p \cdot \frac{1}{p+1} + {}^h m_{p+1} \cdot \frac{p+1}{p+1} \end{aligned}$$

$$= {}^h m_{p+1} \cdot \frac{p+1}{p+1}$$

$$+ {}^h m_p \cdot {}^h m_1 \cdot \left\{ \frac{p}{p+1} + \frac{1}{p+1} \right\}$$

$$+ {}^h m_{p-1} \cdot {}^h m_2 \cdot \left\{ \frac{p-1}{p+1} + \frac{2}{p+1} \right\}$$

$$+ {}^h m_{p-2} \cdot {}^h m_3 \cdot \left\{ \frac{p-2}{p+1} + \frac{3}{p+1} \right\}$$

u. s. w.

$\tan(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)^2 = \tan(45^\circ - \Theta)$, $\tan(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi) = \pm \sqrt{\tan(45^\circ - \Theta)}$,
mittels welcher Formel φ wieder jederzeit mit der erforderlichen Genauigkeit gefunden werden kann.

Um ein Beispiel zu geben, so sei aus zwei Seiten a , b eines ebenen Dreiecks und dem Gegenwinkel α der einen a dieser beiden Seiten der Gegenwinkel β der anderen Seite b zu finden, und es sei gegeben

$$a = 18^\circ . 14' . 0'' \text{ und } \log \frac{b}{a} = 0,5046112,$$

Weil nun bekanntlich $\sin \beta = \frac{b}{a} \sin \alpha$ ist, so ist

$$\begin{aligned} \log \frac{b}{a} &= 0,5046112 \\ \log \sin \alpha &= 9,4953883 \\ \log \sin \beta &= \underline{9,9999995} \end{aligned}$$

Ein Blick in die Callet'schen Tafeln, deren ich mich hier bedienen werde, zeigt, dass β in diesem Falle mittelst seines Sinus nicht mit der erforderlichen Genauigkeit gefunden werden kann, weshalb man nun die Rechnung auf folgende Art führen wird:

$$\begin{aligned} \log \tan \Theta &= 9,9999995 \\ \Theta &= 44^\circ . 59' . 59'', 88 \\ 45^\circ - \Theta &= 0. 0. 0, 12 \\ \log \tan(45^\circ - \Theta) &= 3,7647562 \\ \log \tan(45^\circ - \frac{1}{2}\beta) &= 6,8823781 \\ 45^\circ - \frac{1}{2}\beta &= 0^\circ . 2' . 37'', 39 \\ 90^\circ - \beta &= 0. 5. 14, 78 \\ \beta &= 89. 54. 45, 22 \end{aligned}$$

Uebrigens hat β im vorliegenden Falle, wo offenbar $a < b$ ist, zwei Werthe, deren Summe 180° beträgt. Der zweite Werth ist die Ergänzung des durch die vorhergehende Rechnung gefundenen Werths zu 180° , nämlich $90^\circ . 5' . 14'', 78$.

Berichtigung.

Seite 13, Zeile 9 setze man: — 2,710911 und — 2,710913 für
2,710911 und 2,710913.

dieser Gleichung geben kann, welche grösser als α_0 ist. Ferner kann nur eine reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ zwischen α_1 und α_2 , nur eine reelle Wurzel dieser Gleichung zwischen α_2 und α_3 , u. s. w., nur eine reelle Wurzel derselben Gleichung zwischen α_{p-1} und α_p liegen.

§. 2.

Wir wollen jetzt annehmen, dass $f(x)$ eine ganze rationale algebraische Function des n ten Grades von x sei, und wollen durch successive Entwicklung der derivirten Functionen nach den aus V. A. bekannten Regeln die Reihe

$$f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), \dots f^{(n)}(x)$$

bilden. Setzen wir in dieser Reihe für x die Grössen a und b , wo wieder $a < b$ sein soll; so erhalten wir die beiden Reihen

$$(1) \dots\dots\dots f(a), f'(a), f''(a), f'''(a), \dots\dots f^{(n)}(a);$$

$$(2) \dots\dots\dots f(b), f'(b), f''(b), f'''(b), \dots\dots f^{(n)}(b);$$

in denen, wie wir jetzt annehmen wollen, kein Glied verschwinden soll. Ferner wollen wir annehmen, dass zwischen den Gränzen a und b

$$\mu, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots \mu_n$$

reelle Wurzeln der Gleichungen

$$f(x) = 0, f'(x) = 0, f''(x) = 0, f'''(x) = 0, \dots f^{(n)}(x) = 0$$

liegen, und wollen überhaupt in Bezug auf die Functionen

$$f(x) \text{ und } f'(x),$$

$$f'(x) \text{ und } f''(x),$$

$$f''(x) \text{ und } f'''(x),$$

u. s. w.

$$f^{(n-1)}(x) \text{ und } f^{(n)}(x)$$

durch

$$\epsilon, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots \epsilon_{n-1}$$

Dasselbe bezeichnen, was im vorigen Paragraphen in Bezug auf die Functionen $f(x)$ und $f'(x)$ durch ϵ bezeichnet worden ist; so ist, wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben,

$$\mu \stackrel{=}{<} \mu_1 + \epsilon,$$

$$\mu_1 \stackrel{=}{<} \mu_2 + \epsilon_1,$$

$$\mu_2 \stackrel{=}{<} \mu_3 + \epsilon_2,$$

u. s. w.

$$\mu_{n-1} = \mu_n + \epsilon_{n-1};$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten addirt, und aufhebt, was sich aufheben lässt,

$$\mu \stackrel{=}{<} \mu_n + \epsilon + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \dots + \epsilon_{n-1}.$$

$$E = \pm r \frac{\cos \varphi \tan \psi}{\sin \delta}, \quad E_1 = \pm r_1 \frac{\cos \varphi_1 \tan \psi_1}{\sin \delta_1}.$$

Verlangt man die Coordinaten x_1, y_1, z_1 nicht zu kennen, so stellt man die Formeln am besten unter der folgenden Gestalt dar:

$$\tan A = \frac{r \cos \varphi \sin \alpha_1 \sin (\alpha - 15T) - r_1 \cos \varphi_1 \sin \alpha \sin (\alpha_1 - 15T_1)}{r \cos \varphi \cos \alpha_1 \sin (\alpha - 15T) - r_1 \cos \varphi_1 \cos \alpha \sin (\alpha_1 - 15T_1)},$$

$$\tan \psi = \frac{\tan \delta \sin (A - 15T)}{\sin (\alpha - A)}, \quad \tan \psi_1 = \frac{\tan \delta_1 \sin (A - 15T_1)}{\sin (\alpha_1 - A)},$$

$$\tan B = \pm \frac{\sin (\alpha - A) \sin (\varphi + \psi)}{\cos \varphi \cos \psi \sin (\alpha - 15T)} = \pm \frac{\sin (\alpha_1 - A) \sin (\varphi_1 + \psi_1)}{\cos \varphi_1 \cos \psi_1 \sin (\alpha_1 - 15T_1)},$$

$$E = \pm r \frac{\cos \varphi \tan \psi}{\sin \delta}, \quad E_1 = \pm r_1 \frac{\cos \varphi_1 \tan \psi_1}{\sin \delta_1},$$

$$R = \pm r \frac{\cos \varphi \sin (\alpha - 15T)}{\cos B \sin (\alpha - A)} = \pm r_1 \frac{\cos \varphi_1 \sin (\alpha_1 - 15T_1)}{\cos B \sin (\alpha_1 - A)}.$$

In den Ausdrücken von $\tan B$ müssen die Zeichen so genommen werden, dass $\tan B$ positiv oder negativ wird, je nachdem die Grössen $\cos \psi, \sin (\varphi + \psi)$ oder $\cos \psi_1, \sin (\varphi_1 + \psi_1)$ gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben.

Ohne Schwierigkeit kann man auch nach den folgenden sich leicht aus dem Obigen ergebenden Formeln rechnen:

$$n = \frac{r \cos \varphi \sin (\alpha_1 - 15T) - r_1 \cos \varphi_1 \sin (\alpha_1 - 15T_1)}{\sin (\alpha - \alpha_1)},$$

$$x_1 = n \cos \alpha + r \cos \varphi \cos 15T,$$

$$y_1 = n \sin \alpha + r \cos \varphi \sin 15T,$$

$$z_1 = n \tan \delta + r \sin \varphi,$$

$$\tan A = \frac{y_1}{x_1},$$

$$\tan B = \frac{z_1}{x_1} \cos A,$$

$$E = \pm r \frac{\cos \varphi \sin (A - 15T)}{\cos \delta \sin (\alpha - A)},$$

$$E_1 = \pm r_1 \frac{\cos \varphi_1 \sin (A - 15T_1)}{\cos \delta_1 \sin (\alpha_1 - A)},$$

$$R = \pm r \frac{\cos \varphi \sin (\alpha - 15T)}{\cos B \sin (\alpha - A)};$$

oder auch nach den folgenden Formeln:

$$n_1 = \frac{r \cos \varphi \sin (\alpha - 15T) - r_1 \cos \varphi_1 \sin (\alpha - 15T_1)}{\sin (\alpha - \alpha_1)},$$

$$x_1 = n_1 \cos \alpha_1 + r_1 \cos \varphi_1 \cos 15T_1,$$

$$y_1 = n_1 \sin \alpha_1 + r_1 \cos \varphi_1 \sin 15T_1,$$

$$z_1 = n_1 \tan \delta_1 + r_1 \sin \varphi_1,$$

$$\tan A = \frac{y_1}{x_1},$$

$$\frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1,$$

und folglich

$$\frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy}.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log a}{\log e} a^x \text{ oder } d \cdot a^x = \frac{\log a}{\log e} a^x dx.$$

Die aus dem Obigen bekannte Zahl e betrachtet man bekanntlich als die Basis eines eignen logarithmischen Systems, welches man das natürliche oder hyperbolische System nennt, und bezeichnet die Logarithmen dieses Systems gewöhnlich bloss durch \mathcal{L} . Ist nun b die Basis der durch \log bezeichneten Logarithmen und N eine beliebige Zahl, so ist

$$N = b^{\log N} = e^{\mathcal{L}N},$$

also, wenn man auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen nimmt,

$$\log N \cdot \log b = \mathcal{L}N \text{ oder } \log N = \frac{\mathcal{L}N}{\log b}.$$

Folglich ist

$$\log e = \frac{\log e}{\log b} = \frac{1}{\log b},$$

und daher nach dem Obigen

$$d \log x = \frac{dx}{x \log b}, \text{ also } d \mathcal{L}x = \frac{dx}{x}.$$

Ferner ist

$$\log a = \frac{\log a}{\log b}, \log e = \frac{\log e}{\log b} = \frac{1}{\log b},$$

also

$$\frac{\log a}{\log e} = \log a,$$

und folglich nach dem Obigen

$$d \cdot a^x = a^x \log a dx.$$

$$\frac{E}{\sin(\alpha - \beta)}, \varrho_1 = -R \frac{\sin(\varphi + \alpha - E)}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

$$\begin{aligned} p + \alpha_1) + \varrho_1' \cos(\varphi + \beta_1), \\ p + \alpha_1) + \varrho_1' \sin(\varphi + \beta_1); \end{aligned}$$

$$\frac{p + \alpha_1) - (y' - y_1') \cos(\varphi + \beta_1)}{\sin(\alpha_1 - \beta)},$$

$$\frac{p + \alpha_1) - (y' - y_1') \cos(\varphi + \alpha_1)}{\sin(\alpha_1 - \beta_1)};$$

$$\frac{-E}{\sin(\alpha_1 - \beta_1)}, \varrho_1' = R \frac{\sin(\varphi + \alpha_1 - E)}{\sin(\alpha_1 - \beta_1)}.$$

y_1 ergeben sich nun mittelst der

$$\begin{aligned} p + \alpha) &= x_1' - \varrho_1 \cos(\varphi + \beta), \\ p + \alpha) &= y_1' - \varrho_1 \sin(\varphi + \beta) \end{aligned}$$

$$p + \alpha_1) = x_1' + \varrho_1' \cos(\varphi + \beta_1),$$

$$p + \alpha_1) = y_1' + \varrho_1' \sin(\varphi + \beta_1).$$

Hält man mittelst der Ausdrücke

$$\frac{x_1 - x}{\cos \varphi} = \frac{y_1 - y}{\sin \varphi},$$

welcher 360° nicht übersteigt, bemerkt man, dass die obigen Formeln zwei Werthe liefern, die der Form φ und $\varphi + 180^\circ$ sind. Von diesen nimmt man jederzeit denjenigen zu nehmen, der φ und ϱ_1 entsprechen.

Herr Professor und Director Hansen hat die Rechnung auf diese Aufgabe gemacht.

Es ist zu bemerken, dass für dieses interessante Problem die elementare Trigonometrische Constructionen gegeben werden. Berücksichtigung der Messtischpraxis, welches Problem unter dem Namen des Problems der Feldmesskunst bekanntlich schon lange bekannt ist, werden solchen Auflösungen gern eingeräumt.

deckungen gemacht hatte.
 werden. Später, im
 Jahre 1797, als Lehrer
 diese Entdeckungen
 auf seinem
 während seines
 weiter zu ent-
 dem von den
 Abhandlung-
 wenn schon
 die Staats-
 wieder-
 schon er-
 Abhand-
 zierten sich
 alle
 Werke zu-
 des Werkes
 unter sei-
 für den
 nach
 nur
 prarbei-
 von
 Ver-
 Frage
 kurzen
 Zweck
 24;
 al-
 er-
 zwecken
 darzu-
 dem da-
 wurden.
 gegebenen
 Schramm's
 Ver-
 über die
 welche auf
 Gleichung
 numerischen
 Vor-
 gewöhnlichen
 be-
 nach
 Restes, wenn
 Auch
 weil
 Veränderun-
 dadurch Er-
 möglich wird.
 Betrachtungen

durch die angenommene Verengerung der Grenzen dienen
 nicht, sondern nur, um zu zeigen, dass es keine weitere Verengerung geben wird. Es bleibt
 also nur noch zu zeigen, dass wenn mehr als ein Vorzeichen-
 wechsel zwischen $x = a$ und $x = b$ verloren geht,
 dann auch eine oder mehrere zwischen a und b lie-
 gende imaginäre Wurzeln angedeutet
 werden können. Wenn zwischen a und b liegenden Wur-
 zeln keine vorhanden sind, durch Grenzen, die man
 immer um nächsten kommende einschiebt,
 so wird man, dass man nun zwar dadurch
 die Grenzen enger und nach der von Lagrange und
 Stürm'schen Methode eine Grösse Δ bestimmte, welche
 die kleinste Differenz zweier reellen Wur-
 zeln bezeichnen wird, und sodann für x nach der
 Methode von Δ u. s. w. in der Function $f(x)$
 die Wurzeln bei Gleichungen von einigerma-
 ssen complicirte Rechnungen, dass ein anderes
 Verfahren in der Praxis noch wünschenswerth ist. Ein
 solches Verfahren, das in den meisten Fällen
 zu einem Resultat führt, ist nun folgendes. Es gründet
 sich auf die Subtangente derjenigen Curve,
 welche die Werthe der $f(x)$ veranschaulicht.
 Durch die folgende Zusammenziehung der Grenzen
 wird erreicht, dass zwischen diesen Grenzen nur zwei
 Wurzeln vorhanden sind, eine Wurzel der Gleichung
 $f(x) = 0$ und eine Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$ liegt,
 zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$
 muss sich also ein Minimum oder Maxi-
 mum befinden. Hieraus folgt leicht,
 dass die Subtangente $\frac{f'(x)}{f(x)}$ und $\frac{f(b)}{f'(b)}$
 sich als $x = a$ sein müssen, wenn
 die Tangente der Curve $f(x)$ mit
 der x -Achse bei $x = b$ liegen sollen. Fin-
 det man dies, so ist diess ein sicheres
 Zeichen, dass keine Wurzeln verloren ge-
 gangen sind, wenn $f(x) = 0$ zwei imaginäre Wurzeln
 vorhanden, wenn $f'(x)$ und $f(x)$
 keine Wurzeln haben, wenn $f'(x) = 0$ zwei gleiche
 Wurzeln vorhanden, was aber ebenfalls leicht zu er-
 kennen ist, wenn $\frac{f'(x)}{f(x)} \leq b - a$, so kann man dar-
 auf verzichten, sondern muss dann engere
 Grenzen wählen, wodurch man aber endlich gewiss,
 wenn man es will, dahin gelangt sie zu trennen,
 wenn man die Summe zweier Subtangente
 der Wurzeln der zugehörigen Punkte zu
 der Tangente zugehörige Verfahren entdeckt,
 wenn man nur Wurzeln zwischen den
 Grenzen gefunden gegangen sind, so ist durch
 die Methode bekannt, welche von den
 Wurzeln, wenn man sie $= 0$ setzt,
 zwischen a und b habe oder verlo-

für $m = 3$

$$13) \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{2}})} = \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{2}})}$$

u. s. w.

Das letzte Glied, allgemein genommen wie in 10), nach unserer Methode durch Beifügung von $p - p$ behandelt, ist

$$\begin{aligned}
 14) \int x^{-\frac{1}{2m}} \cdot [(1+p) - (p - x^{\frac{1}{m}})]^{-1} dx \\
 = \frac{\frac{2m-1}{2m} x^{\frac{2m-1}{2m}}}{(2m-1)(1+p)} + \frac{\frac{2m+1}{2m} p x^{\frac{2m+1}{2m}}}{(1+p)^2} \cdot 2m \\
 + \frac{\frac{2m-1}{2m} p^2 x^{\frac{2m-1}{2m}} - \frac{2m+1}{2m} 2p x^{\frac{2m+1}{2m}} + \frac{2m+3}{2m} x^{\frac{2m+3}{2m}}}{(1+p)^3} \cdot 2m \\
 + \frac{\frac{2m-1}{2m} p^3 x^{\frac{2m-1}{2m}} - \frac{2m+1}{2m} 3p^2 x^{\frac{2m+1}{2m}} + \frac{2m+3}{2m} 3p x^{\frac{2m+3}{2m}} - \frac{2m+5}{2m} x^{\frac{2m+5}{2m}}}{(1+p)^4} \cdot 2m \\
 + \frac{\frac{2m-1}{2m} p^4 x^{\frac{2m-1}{2m}} - \frac{2m+1}{2m} 4p^3 x^{\frac{2m+1}{2m}} + \frac{2m+3}{2m} 6p^2 x^{\frac{2m+3}{2m}} - \frac{2m+5}{2m} 4p x^{\frac{2m+5}{2m}} + \frac{2m+7}{2m} x^{\frac{2m+7}{2m}}}{(1+p)^5} \cdot 2m \\
 + \left\{ \begin{aligned} & \frac{\frac{2m-1}{2m} p^5 x^{\frac{2m-1}{2m}} - \frac{2m+1}{2m} 5p^4 x^{\frac{2m+1}{2m}} + \frac{2m+3}{2m} 10p^3 x^{\frac{2m+3}{2m}}}{2m-1} \\ & - \frac{2m+5}{2m} 10p^2 x^{\frac{2m+5}{2m}} + \frac{2m+7}{2m} 5p x^{\frac{2m+7}{2m}} - \frac{2m+9}{2m} x^{\frac{2m+9}{2m}} \end{aligned} \right\} \cdot 2m \\
 + \left\{ \begin{aligned} & \frac{\frac{2m-1}{2m} p^6 x^{\frac{2m-1}{2m}} - \frac{2m+1}{2m} 6p^5 x^{\frac{2m+1}{2m}} + \frac{2m+3}{2m} 15p^4 x^{\frac{2m+3}{2m}} - \frac{2m+5}{2m} 20p^3 x^{\frac{2m+5}{2m}}}{2m-1} \\ & + \frac{2m+7}{2m} 15p^2 x^{\frac{2m+7}{2m}} - \frac{2m+9}{2m} 6p x^{\frac{2m+9}{2m}} + \frac{2m+11}{2m} x^{\frac{2m+11}{2m}} \end{aligned} \right\} \cdot 2m \\
 + \dots
 \end{aligned}$$

Man erhält, nach Annullirung des zweiten Gliedes,

$$p = \frac{(2m-1)x^{\frac{1}{m}}}{2m+1}$$

Diesen Werth in den vorigen Ausdruck (14) gesetzt und zugleich durch $2m$ dividirt, ergibt sich

$$\int_0^c x^1 \sin hx Fx dx = 0$$

$$\int_0^c x^2 \cos hx Fx dx = 0$$

etc.

und aus (7)

$$\int_0^c x \cos hx Fx dx = 0$$

$$\int_0^c x^2 \sin hx Fx dx = 0$$

$$\int_0^c x^3 \cos hx Fx dx = 0$$

etc.

Ist also m eine ganze Zahl, so kann man durch Differenzialquotienten der einen oder der anderen Gleichung (6) oder (7) immer zu dem Ausdrücke

$$\int_0^c x^m \cos hx Fx dx = 0$$

gelangen. Da nun h eine beliebige ganze Zahl sein kann, so nehmen wir $h = 0$, und erhalten

$$\int_0^c x^m Fx dx = 0 \quad (8).$$

§. 5.

Wir können nun leicht ein sehr allgemeines Theorem beweisen. Bezeichnen wir die successiven Differenzialquotienten von fx nach x mit f^1x , f^2x , . . . etc.; so ist bekanntlich nach Maclaurin's Satze

$$fx = f(0) + \frac{x}{1} f^1(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f^2(0) + \dots$$

also, weil $f(0)$, $f^1(0)$, $f^2(0)$. . Constanten sind,

$$\begin{aligned} \int_0^c Fx fx dx &= f(0) \int_0^c Fx dx + \frac{f^1(0)}{1} \\ &\quad \int_0^c x Fx dx + \frac{f^2(0)}{1 \cdot 2} \int_0^c x^2 Fx dx + \dots \end{aligned}$$

d. i. nach (5) und (8)

$$\int_0^c Fx fx dx = \pi f(0), \quad 2\pi > c > 0. \quad (9).$$

Von diesem Theoreme werden wir nun eine sehr fruchtbare Anwendung machen.

In dem Ausdrücke (3) möge $z - \alpha$ für x stehen; multipliciren wir noch mit den Faktoren $fz dz$, und integriren zwischen den Gränzen 0, π , so wird

$$\int_0^\pi F(z - \alpha) fz dz = \int_0^\pi fz dz + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\pi fz \cos n(z - \alpha) dz \quad (10)$$

Für $z - \alpha = \Theta$ wird $fz = f(\Theta + \alpha)$ und, wenn $z = \pi$, ist $\Theta = \pi - \alpha$, wenn $z = 0$, ist $\Theta = -\alpha$ geworden; also

positiv ist und nicht verschwindet. Die Grösse a ist kleiner als die Grösse b , es ist $a < b$, wenn die Differenz

$$a - b$$

negativ ist.

§. 2.

Lehrsatz. Wenn

$$a > b, a_1 > b_1, a_2 > b_2, a_3 > b_3, \dots$$

ist, so ist auch

$$a + a_1 + a_2 + a_3 + \dots > b + b_1 + b_2 + b_3 + \dots$$

Beweis. Weil nach der Voraussetzung

$$a > b, a_1 > b_1, a_2 > b_2, a_3 > b_3, \dots$$

ist, so verschwindet nach §. 1. keine der Differenzen

$$a - b, a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3, \dots$$

und diese Differenzen sind sämtlich positiv. Also verschwindet offenbar auch die Summe

$$(a - b) + (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \dots$$

dieser Differenzen nicht und ist positiv. Weil nun

$$\begin{aligned} & (a - b) + (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \dots \\ &= (a + a_1 + a_2 + a_3 + \dots) - (b + b_1 + b_2 + b_3 + \dots) \end{aligned}$$

ist, so verschwindet auch die Grösse

$$(a + a_1 + a_2 + a_3 + \dots) - (b + b_1 + b_2 + b_3 + \dots)$$

nicht und ist positiv, woraus sich nach §. 1. unmittelbar ergibt, dass

$$a + a_1 + a_2 + a_3 + \dots > b + b_1 + b_2 + b_3 + \dots$$

ist, wie bewiesen werden sollte.

§. 3.

Zusatz. Wenn

$$a < b, a_1 < b_1, a_2 < b_2, a_3 < b_3, \dots$$

ist, so ist auch

$$a + a_1 + a_2 + a_3 + \dots < b + b_1 + b_2 + b_3 + \dots$$

Weil nämlich nach der Voraussetzung offenbar

$$b > a, b_1 > a_1, b_2 > a_2, b_3 > a_3, \dots$$

ist, so ist nach §. 2.

$$b + b_1 + b_2 + b_3 + \dots > a + a_1 + a_2 + a_3 + \dots,$$

und folglich

$$a + a_1 + a_2 + a_3 + \dots < b + b_1 + b_2 + b_3 + \dots,$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 4.

Lehrsatz. Wenn

$$a > b, a_1 > b_1, a_2 > b_2, a_3 > b_3, \dots;$$

$$a = \beta, a_1 = \beta_1, a_2 = \beta_2, a_3 = \beta_3, \dots$$

ist, so ist

$$a + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

$$> b + b_1 + b_2 + b_3 + \dots + \beta + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots$$

Beweis. Weil nach §. 2.

$$a + a_1 + a_2 + a_3 + \dots > b + b_1 + b_2 + b_3 + \dots$$

ist, so verschwindet die Differenz

$$(a + a_1 + a_2 + a_3 + \dots) - (b + b_1 + b_2 + b_3 + \dots)$$

nicht und ist positiv. Nach der Voraussetzung und nach §. 1. verschwinden die Differenzen

$$a - \beta, a_1 - \beta_1, a_2 - \beta_2, a_3 - \beta_3, \dots$$

sämmtlich, und es verschwindet folglich auch die Summe

$$(a - \beta) + (a_1 - \beta_1) + (a_2 - \beta_2) + (a_3 - \beta_3) + \dots$$

dieser Differenzen, d. i. die Grösse

$$(a + a_1 + a_2 + a_3 + \dots) - (\beta + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots).$$

Hieraus geht hervor, dass die Summe der Differenzen

$$(a + a_1 + a_2 + a_3 + \dots) - (b + b_1 + b_2 + b_3 + \dots)$$

und

$$(a + a_1 + a_2 + a_3 + \dots) - (\beta + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots),$$

d. i. die Grösse

$$(a + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a + a_1 + a_2 + a_3 + \dots)$$

$$- (b + b_1 + b_2 + b_3 + \dots + \beta + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots)$$

nicht verschwindet und positiv ist. Folglich ist nach §. 1.

$$a + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

$$> b + b_1 + b_2 + b_3 + \dots + \beta + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots,$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 5.

Zusatz. Wenn

$$a < b, a_1 < b_1, a_2 < b_2, a_3 < b_3, \dots;$$

$$a = \beta, a_1 = \beta_1, a_2 = \beta_2, a_3 = \beta_3, \dots$$

ist, so ist

$$a + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

$$< b + b_1 + b_2 + b_3 + \dots + \beta + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots$$

Weil nämlich nach der Voraussetzung

$$b > a, b_1 > a_1, b_2 > a_2, b_3 > a_3, \dots;$$

$$\beta = a, \beta_1 = a_1, \beta_2 = a_2, \beta_3 = a_3, \dots$$

ist, so ist nach §. 4.

$$b + b_1 + b_2 + b_3 + \dots + \beta + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots \\ > a + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + \alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots,$$

und folglich

$$a + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + \alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots \\ < b + b_1 + b_2 + b_3 + \dots + \beta + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots,$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 6.

Lehrsatz. Wenn

$$a > b \text{ und } a_1 \overline{<} b_1$$

ist, so ist

$$a - a_1 > b - b_1.$$

Beweis. Weil nach der Voraussetzung

$$a > b \text{ und } b_1 \overline{>} a_1$$

ist, so ist nach §. 4.

$$a + b_1 > b + a_1.$$

Weil nun

$$-a_1 - b_1 = -a_1 - b_1$$

ist, so ist nach §. 4.

$$a + b_1 - a_1 - b_1 > b + a_1 - a_1 - b_1,$$

d. i.

$$a - a_1 > b - b_1,$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 7.

Zusatz. Wenn

$$a < b \text{ und } a_1 \overline{>} b_1$$

ist, so ist

$$a - a_1 < b - b_1.$$

Weil nämlich nach der Voraussetzung

$$b > a \text{ und } b_1 \overline{<} a_1$$

ist, so ist nach §. 6.

$$b - b_1 > a - a_1,$$

und folglich

$$a - a_1 < b - b_1,$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 8.

Lehrsatz. Wenn

$$a = b \text{ und } a_1 > b_1$$

ist, so ist

$$a - a_1 < b - b_1.$$

Beweis. Weil nach der Voraussetzung

$$a = b \text{ und } b_1 < a_1$$

ist, so ist nach §. 5.

$$a + b_1 < b + a_1.$$

Weil nun

$$-a_1 - b_1 = -a_1 - b_1$$

ist, so ist nach §. 5.

$$a + b_1 - a_1 - b_1 < b + a_1 - a_1 - b_1,$$

d. i.

$$a - a_1 < b - b_1,$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 9.

Zusatz. Wenn

$$a = b \text{ und } a_1 < b_1$$

ist, so ist

$$a - a_1 > b - b_1.$$

Weil nämlich nach der Voraussetzung

$$b = a \text{ und } b_1 > a_1$$

ist, so ist nach §. 8.

$$b - b_1 < a - a_1,$$

und folglich

$$a - a_1 > b - b_1,$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 10.

Lehrsatz. Wenn die Grössen

$$a, a_1, a_2, \dots a_n; b, b_1, b_2, \dots b_n$$

sämmtlich positiv sind, und

$$a > b, a_1 > b_1, a_2 > b_2, \dots a_n > b_n$$

ist, so ist auch

$$aa_1 a_2 \dots a_n > bb_1 b_2 \dots b_n.$$

Beweis. Nach der Voraussetzung sind die Differenzen

$$a - b, a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3, \dots$$

Beweis. Weil nach der Voraussetzung

$$b_1 > a_1, a \equiv b$$

ist, so ist nach §. 10. und §. 12.

$$ab_1 > a_1b,$$

und folglich nach §. 14.

$$\frac{ab_1}{a_1b_1} > \frac{a_1b}{a_1b_1}, \text{ d. i. } \frac{a}{a_1} > \frac{b}{b_1},$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 17.

Zusatz. Wenn die Grössen $a, b; a_1, b_1$ sämtlich positiv sind und

$$a \equiv b, a_1 > b_1$$

ist, in dem Falle $a \equiv b$ aber die Grössen a, b nicht verschwinden, auch nicht $b_1 = 0$ ist, so ist

$$\frac{a}{a_1} < \frac{b}{b_1}.$$

Weil nämlich nach der Voraussetzung

$$b \equiv a, b_1 < a_1$$

ist, so ist nach §. 16.

$$\frac{b}{b_1} > \frac{a}{a_1}, \text{ also } \frac{a}{a_1} < \frac{b}{b_1},$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 18.

Lehrsatz. Wenn die Grössen a, b positiv sind und $a > b$ ist, so ist $a^n > b^n$ oder $a^n < b^n$, jenachdem das nicht verschwindende n positiv oder negativ ist.

Beweis. Weil die Grössen a, b positiv sind und $a > b$ ist, so ist

$$\frac{b}{a} < 1.$$

Also ist offenbar

$$\left(\frac{b}{a}\right)^n < 1 \text{ oder } \left(\frac{b}{a}\right)^n > 1,$$

jenachdem das nicht verschwindende n positiv oder negativ ist.
Weil nun

$$\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$$

ist, so ist

$$\frac{b^n}{a^n} < 1 \text{ oder } \frac{b^n}{a^n} > 1,$$

und folglich

$$a^2 + b^2 = 2ab.$$

§. 22.

Lehrsatz. Wenn, unter der Voraussetzung, dass n grösser als die Einheit ist, die n Grössen a, b, c, d, e, \dots nicht sämmtlich unter einander gleich sind, und der Kürze wegen

$$S = a + b + c + d + e + \dots$$

und

$$\begin{aligned} \Sigma &= ab + ac + ad + ae + \dots \\ &\quad + bc + bd + be + \dots \\ &\quad + cd + ce + \dots \\ &\quad + de + \dots \end{aligned}$$

gesetzt wird, so ist immer

$$(n-1) S^2 > 2n\Sigma.$$

Beweis. Nach dem in §. 21. bewiesenen Satze ist

$$a^2 + b^2 \geq 2ab, a^2 + c^2 \geq 2ac, a^2 + d^2 \geq 2ad, a^2 + e^2 \geq 2ae, \dots$$

$$b^2 + c^2 \geq 2bc, b^2 + d^2 \geq 2bd, b^2 + e^2 \geq 2be, \dots$$

$$c^2 + d^2 \geq 2cd, c^2 + e^2 \geq 2ce, \dots$$

$$d^2 + e^2 \geq 2de, \dots$$

Weil nun nach der Voraussetzung die Grössen a, b, c, d, e, \dots nicht sämmtlich unter einander gleich sind, so sind im Vorhergehenden nach §. 21. nicht überall die oberen Zeichen zu nehmen, und man erhält also, wenn man auf beiden Seiten der Zeichen addirt, nach §. 4.

$$(n-1) (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + \dots) > 2\Sigma.$$

Also ist, wenn man auf beiden Seiten die Grösse $2(n-1)\Sigma$ addirt, nach §. 4. auch

$$(n-1) (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + \dots + 2\Sigma) > 2n\Sigma.$$

Nun ist aber bekanntlich

$$\begin{aligned} S^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + \dots \\ &\quad + 2ab + 2ac + 2ad + 2ae + \dots \\ &\quad + 2bc + 2bd + 2be + \dots \\ &\quad + 2cd + 2ce + \dots \\ &\quad + 2de + \dots \end{aligned}$$

d. i.

$$S^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + \dots + 2\Sigma,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$(n-1) S^2 > 2n\Sigma,$$

wie bewiesen werden sollte.

$$na^n + b^n \geq a^n + na^{n-1}b,$$

wie bewiesen werden sollte.

Anmerkung. Für $n=1$ ist offenbar

$$aa^n + b^n = a^n + na^{n-1}b = a + b.$$

Für $\alpha = \delta$ ist immer

$$na^n + b^n = a^n + na^{n-1}b = (n+1)a^n.$$

§. 24.

Zusatz. Weil unter denselben Voraussetzungen wie vorher

$$na^n + b^n > a^n + na^{n-1}b,$$

$$b^n + na^{n-1}b = b^n + na^{n-1}b$$

ist, so ist nach §. 6.

$$na^n + b^n - b^n - na^{n-1}b \geq a^n + na^{n-1}b - b^n - na^{n-1}b,$$

d. i.

$$na^n - na^{n-1}b > a^n - b^n$$

oder

$$na^n(1 - \frac{b}{a}) > a^n \{1 - (\frac{b}{a})^n\}.$$

Dividirt man nun auf beiden Seiten durch die positive Grösse a^n , so erhält man nach §. 14.

$$n \left(1 - \frac{b}{a}\right) > 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

§. 25.

Lehrsatz. Wenn die Grössen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$$

nicht sämmtlich unter einander gleich sind und $n > 1$ ist, so ist der absolute Werth der Summe

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n$$

jederzeit kleiner als das Product

$$\sqrt{n} \cdot \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \dots + a_n^2)}.$$

Beweis. Ohne alle Schwierigkeit erhellt die Richtigkeit der Gleichung

[illegible]

Weil nun nach der Voraussetzung die Grössen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$$

nicht sämmtlich unter einander gleich sind, so verschwinden die Differenzen

$$a_1 - a_2, a_1 - a_3, a_1 - a_4, \dots, a_1 - a_n;$$

$$a_2 - a_3, a_2 - a_4, \dots, a_2 - a_n;$$

$$a_3 - a_4, \dots, a_3 - a_n;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{n-1} - a_n$$

nicht sämmtlich, und es ist also

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n)^2 \\ < n(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \dots + a_n^2);$$

folglich ist offenbar der absolute Werth von

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n$$

kleiner als

$$\sqrt{n} \cdot \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \dots + a_n^2)},$$

wie bewiesen werden sollte.

Anmerkung. Wenn die Grössen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$$

sämmtlich unter einander gleich sind, so ergibt sich aus dem Beweise des obigen Satzes leicht, dass der absolute Werth der Summe

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n$$

der Grösse

$$\sqrt{n} \cdot \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \dots + a_n^2)}$$

gleich ist.

§. 26.

Zusatz. Wenn die Grössen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$$

nicht sämmtlich unter einander gleich sind und $n > 1$ ist, so ist der absolute Werth von

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n}{n}$$

kleiner als die Grösse

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

§. 27.

Lehrsatz. Wenn $n > 1$ ist und die Brüche

$$\frac{a_1}{a_1}, \frac{a_2}{a_2}, \frac{a_3}{a_3}, \frac{a_4}{a_4}, \dots, \frac{a_n}{a_n}$$

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_\mu < \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_\mu}{\mu} \right)^\mu$$

oder

$$\sqrt[\mu]{a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_\mu} < \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_\mu}{\mu}$$

5. Man nehme nun, welches offenbar immer möglich ist, n so gross, dass $2^n > n$ oder $\mu > n$ ist, und setze

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n}{n} = x.$$

Dann ist nach 4.

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_n x^{\mu-n} < \left\{ \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + (\mu-n)x}{\mu} \right\}^\mu$$

oder

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_n x^{\mu-n} < \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n - nx + \mu x}{\mu} \right)^\mu,$$

d. i. weil

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n = nx$$

ist,

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_n x^{\mu-n} < x^\mu,$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten mit $x^{\mu-n}$ dividirt,

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_n < x^n,$$

d. i.

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_n < \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n}{n} \right)^n$$

oder

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_n} < \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n}{n},$$

wie bewiesen werden sollte.

Anmerkung. Wenn die Grössen $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$ sämmtlich unter einander gleich sind; so ist offenbar

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_n} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n}{n}.$$

§. 30.

Zusatz. Wenn a und b zwei ungleiche positive Grössen und m und n zwei positive ganze Zahlen sind; so ist nach §. 29.

$$\sqrt[m+n]{(a^{m+n})^n \cdot (b^{m+n})^m} < \frac{na^{m+n} + mb^{m+n}}{m+n}$$

oder

$$\sqrt[m+n]{(a^n b^m)^{m+n}} < \frac{na^{m+n} + mb^{m+n}}{m+n};$$

$$\varrho A = M(\varrho a, \varrho a_1, \varrho a_2, \varrho a_3, \varrho a_4, \dots),$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 38.

Lehrsatz. Wenn

$$A = M(a, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$$

ist; so ist für jedes ϱ mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$A \pm \varrho = M(a \pm \varrho, a_1 \pm \varrho, a_2 \pm \varrho, a_3 \pm \varrho, \dots),$$

Beweis. Die kleinste und grösste unter den Grössen

$$a, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$$

seien respective α und γ ; so ist nach der Voraussetzung und nach §. 33.

$$A = M(\alpha, \gamma).$$

Also ist nach §. 35. das Product

$$(\alpha - A) (A - \gamma),$$

und folglich offenbar auch das Product

$$\{\alpha \pm \varrho - (A \pm \varrho)\} \{A \pm \varrho - (\gamma \pm \varrho)\}$$

positiv. Daher ist nach §. 36.

$$A \pm \varrho = M(\alpha \pm \varrho, \gamma \pm \varrho).$$

Weil nun die Grössen $\alpha \pm \varrho$ und $\gamma \pm \varrho$ offenbar beide unter den Gliedern der Reihe

$$a \pm \varrho, a_1 \pm \varrho, a_2 \pm \varrho, a_3 \pm \varrho, a_4 \pm \varrho, \dots$$

vorkommen; so ist nach §. 34.

$$A \pm \varrho = M(a \pm \varrho, a_1 \pm \varrho, a_2 \pm \varrho, a_3 \pm \varrho, \dots),$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 39.

Lehrsatz. Wenn die Grössen $a, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ sämtlich positiv sind und

$$A = M(a, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$$

ist; so ist für jedes ϱ

$$A^\varrho = M(a^\varrho, a_1^\varrho, a_2^\varrho, a_3^\varrho, a_4^\varrho, \dots).$$

Beweis. Die kleinste und grösste unter den Grössen

$$a, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$$

seien respective α und γ ; so ist nach der Voraussetzung und nach §. 33.

$$A = M(\alpha, \gamma).$$

Ist nun A einer der beiden Grössen α, γ gleich, so verschwindet das Product

$$(\alpha^\varrho - A^\varrho) (A^\varrho - \gamma^\varrho),$$

$$(q^a - q^A) (q^A - q^y),$$

und ist folglich positiv. Ist dagegen A keiner der Grössen a, y gleich, so ist

$$a < A < y.$$

Wollt man nun nach der Voraussetzung q positiv ist; so ist nach § 30

$$q^a < q^A < q^y$$

oder

$$q^a > q^A > q^y,$$

je nachdem $q > 1$ oder $q < 1$ ist. Für $q = 1$ wäre

$$q^a = q^A = q^y.$$

In allen Fällen haben folglich die Differenzen

$$q^a - q^A, q^A - q^y$$

gleiches Vorzeichen, und das Product

$$(q^a - q^A) (q^A - q^y)$$

ist also positiv. Daher ist nach § 30

$$q^A = M(q^a, q^y).$$

Weit aber die Grössen q^a und q^y unter den Gliedern der Reihe

$$q^a, q^{a+1}, q^{a+2}, q^{a+3}, q^{a+4}, \dots$$

vorzukommen; so ist nach § 30

$$q^A = M(q^a, q^{a+1}, q^{a+2}, q^{a+3}, q^{a+4}, \dots)$$

wie bemerkt werden sollen.

§ 31

Definition. Wenn $a, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ positive Grössen sind und

$$L = M(a, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$$

ist, so ist für jedes logarithmische System

$$\log L = M(\log a, \log a_1, \log a_2, \log a_3, \log a_4, \dots)$$

Beweis. Die kleinste und grösste unter den Grössen

$$a, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$$

seien respective x und y ; so ist nach der Voraussetzung und nach § 30

$$L = M(x, y).$$

Ist nun L eines der beiden Grössen x, y gleich; so verschwindet das Product

$$(\log x - \log L) (\log L - \log y),$$

und ist folglich positiv. Ist dagegen L keiner der beiden Grössen x, y gleich und folglich

$$x < L < y$$

so bleibt wie nach § 30 allgemein anzuwenden, das Product

oder

$$\alpha - \frac{\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots}{b + b_1 + b_2 + b_3 + \dots}, \frac{\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots}{b + b_1 + b_2 + b_3 + \dots} - \gamma$$

gleiche Vorzeichen. Daher ist das Product

$$\left(\alpha - \frac{\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots}{b + b_1 + b_2 + b_3 + \dots}\right) \left(\frac{\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots}{b + b_1 + b_2 + b_3 + \dots} - \gamma\right)$$

positiv, und folglich nach §. 36.

$$\frac{\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots}{b + b_1 + b_2 + b_3 + \dots} = M(\alpha, \gamma).$$

Also ist nach §. 34. auch

$$\frac{\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots}{b + b_1 + b_2 + b_3 + \dots} = M\left(\frac{\alpha}{b}, \frac{\alpha_1}{b_1}, \frac{\alpha_2}{b_2}, \frac{\alpha_3}{b_3}, \dots\right),$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 43.

Zusatz. Setzt man im vorigen Satze $b = b_1 = b_2 = b_3 = \dots = 1$, und bezeichnet die Anzahl der in jeder der beiden Reihen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ und b, b_1, b_2, b_3, \dots enthaltenen Glieder durch n ; so ergibt sich aus dem vorigen Satze die Gleichung

$$\frac{\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots}{n} = M(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots),$$

wo $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ ganz beliebige Grössen bezeichnen.

Hieraus sieht man, dass das arithmetische Mittel

$$\frac{\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots}{n}$$

zwischen den n beliebigen Grössen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ in der That jederzeit eine Mittelgrösse zwischen diesen Grössen ist.

§. 44.

Zusatz. Sind die Brüche

$$\frac{\alpha}{b}, \frac{\alpha_1}{b_1}, \frac{\alpha_2}{b_2}, \frac{\alpha_3}{b_3}, \dots$$

sämmlich unter einander gleich, so fällt jede Mittelgrösse zwischen ihnen mit ihnen selbst zusammen, und es ist folglich nach §. 42. unter dieser Voraussetzung

$$\frac{\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots}{b + b_1 + b_2 + b_3 + \dots} = \frac{\alpha}{b} = \frac{\alpha_1}{b_1} = \frac{\alpha_2}{b_2} = \frac{\alpha_3}{b_3} = \dots$$

§. 45.

Zusatz. Sind q, q_1, q_2, q_3, \dots beliebige Grössen mit einerlei Vorzeichen; so haben, da auch die Grössen b, b_1, b_2, b_3, \dots gleiche Vorzeichen haben, auch die Produkte

$$bq, b_1q_1, b_2q_2, b_3q_3, \dots$$

sämmlich einerlei Vorzeichen, und es ist folglich nach §. 42.

$$\frac{bq + b_1q_1 + b_2q_2 + b_3q_3 + \dots}{b + b_1 + b_2 + b_3 + \dots} = M\left(\frac{bq}{b}, \frac{b_1q_1}{b_1}, \frac{b_2q_2}{b_2}, \frac{b_3q_3}{b_3}, \dots\right)$$

$$\cos \frac{m\varphi + 2x\pi}{n} = \cos \frac{m\varphi \pm 2(\lambda\mu + \mu')\pi}{n},$$

$$\sin \frac{m\varphi + 2x\pi}{n} = \sin \frac{m\varphi \pm 2(\lambda\mu + \mu')\pi}{n};$$

d. i., weil $n = 2\mu$ ist,

$$\cos \frac{m\varphi + 2x\pi}{n} = \cos \left(\frac{m\varphi \pm 2\mu'\pi}{n} \pm \lambda\pi \right),$$

$$\sin \frac{m\varphi + 2x\pi}{n} = \sin \left(\frac{m\varphi \pm 2\mu'\pi}{n} \pm \lambda\pi \right).$$

Ist nun λ eine gerade Zahl, so ist

$$\cos \frac{m\varphi + 2x\pi}{n} = \cos \frac{m\varphi \pm 2\mu'\pi}{n},$$

$$\sin \frac{m\varphi + 2x\pi}{n} = \sin \frac{m\varphi \pm 2\mu'\pi}{n};$$

folglich

$$\begin{aligned} & \cos \frac{m\varphi + 2x\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi + 2x\pi}{n} \sqrt{-1} \\ &= \cos \frac{m\varphi \pm 2\mu'\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi \pm 2\mu'\pi}{n} \sqrt{-1}, \\ & \cos \frac{m\varphi + 2x\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi + 2x\pi}{n} \sqrt{-1} \\ &= \cos \frac{m\varphi \pm 2\mu'\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi \pm 2\mu'\pi}{n} \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Ist aber λ eine ungerade, also $\lambda + 1$ eine gerade Zahl, so kann man

$$\cos \frac{m\varphi + 2x\pi}{n} = \cos \left\{ \frac{m\varphi \pm 2\mu'\pi}{n} \pm (\lambda + 1)\pi \mp \pi \right\},$$

$$\sin \frac{m\varphi + 2x\pi}{n} = \sin \left\{ \frac{m\varphi \pm 2\mu'\pi}{n} \pm (\lambda + 1)\pi \mp \pi \right\}$$

oder

$$\cos \frac{m\varphi + 2x\pi}{n} = \cos \left\{ \frac{m\varphi \mp 2(\mu - \mu')\pi}{n} \pm (\lambda + 1)\pi \right\},$$

$$\sin \frac{m\varphi + 2x\pi}{n} = \sin \left\{ \frac{m\varphi \mp 2(\mu - \mu')\pi}{n} \mp (\lambda + 1)\pi \right\}$$

setzen. Dann ist, weil $\lambda + 1$ eine gerade Zahl ist,

$$\cos \frac{m\varphi + 2x\pi}{n} = \cos \frac{m\varphi \mp 2(\mu - \mu')\pi}{n},$$

$$\sin \frac{m\varphi + 2x\pi}{n} = \sin \frac{m\varphi \mp 2(\mu - \mu')\pi}{n},$$

und folglich

$$\begin{aligned} & \cos \frac{m\varphi + 2x\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi + 2x\pi}{n} \sqrt{-1} \\ &= \cos \frac{m\varphi \mp 2(\mu - \mu')\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi \mp 2(\mu - \mu')\pi}{n} \sqrt{-1}, \end{aligned}$$

$$\cos \frac{m\varphi + 2\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi + 2\pi}{n} \sqrt{-1}$$

$$= \cos \frac{m\varphi \mp 2(\mu - \mu')\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi \mp 2(\mu - \mu')\pi}{n} \sqrt{-1}.$$

Aus dieser Darstellung geht deutlich hervor, dass man in Gleichung

$$(\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1})^{\frac{n}{x}} = \cos \frac{m\varphi + 2\pi}{n} \pm \sin \frac{m\varphi + 2\pi}{n} \sqrt{-1}$$

bloss

$$x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \pm \mu$$

zu setzen braucht, weil nach dem Vorhergehenden unter den

then von

$$(\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1})^{\frac{n}{x}},$$

welche man auf diese Art erhält, in der That alle übrigen enthalten sind.

Für

$$(\cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1})^{\frac{n}{x}}$$

erhält man auf diese Art die folgenden Werthe:

$$\cos \frac{m\varphi}{n} + \sin \frac{m\varphi}{n} \sqrt{-1},$$

$$\cos \frac{m\varphi \pm 2\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi \pm 2\pi}{n} \sqrt{-1},$$

$$\cos \frac{m\varphi \pm 4\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi \pm 4\pi}{n} \sqrt{-1},$$

$$\cos \frac{m\varphi \pm 6\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi \pm 6\pi}{n} \sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos \frac{m\varphi \pm \pi\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi \pm \pi\pi}{n} \sqrt{-1};$$

und eben so erhält man für

$$(\cos \varphi - \sin \varphi \sqrt{-1})^{\frac{n}{x}}$$

die folgenden Werthe:

$$\cos \frac{m\varphi}{n} - \sin \frac{m\varphi}{n} \sqrt{-1},$$

$$\cos \frac{m\varphi \pm 2\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi \pm 2\pi}{n} \sqrt{-1},$$

$$\cos \frac{m\varphi \pm 4\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi \pm 4\pi}{n} \sqrt{-1},$$

$$\cos \frac{m\varphi \pm 6\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi \pm 6\pi}{n} \sqrt{-1},$$

u. s. w.

oder

$$\pm \left(\cos \frac{m\varphi}{n} - \sin \frac{m\varphi}{n} \sqrt{-1} \right),$$

$$\cos \frac{m\varphi \pm 2\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi \pm 2\pi}{n} \sqrt{-1},$$

$$\cos \frac{m\varphi \pm 4\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi \pm 4\pi}{n} \sqrt{-1},$$

$$\cos \frac{m\varphi \pm 6\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi \pm 6\pi}{n} \sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos \frac{m\varphi \pm (n-2)\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi \pm (n-2)\pi}{n} \sqrt{-1}.$$

II. n sei eine ungerade Zahl, nämlich

$$n = 2\mu + 1.$$

Ueberhaupt sei

$$2x = \pm \{(2\mu + 1)\lambda + \mu'\},$$

wo λ eine positive ganze Zahl und $\mu' < 2\mu + 1$ ist, so ist

$$\cos \frac{m\varphi + 2x\pi}{n} = \cos \frac{m\varphi \pm \{(2\mu + 1)\lambda + \mu'\}\pi}{n},$$

$$\sin \frac{m\varphi + 2x\pi}{n} = \sin \frac{m\varphi \pm \{(2\mu + 1)\lambda + \mu'\}\pi}{n};$$

d. i., weil $n = 2\mu + 1$ ist,

$$\cos \frac{m\varphi + 2x\pi}{n} = \cos \left(\frac{m\varphi \pm \mu'\pi}{n} \pm \lambda\pi \right),$$

$$\sin \frac{m\varphi + 2x\pi}{n} = \sin \left(\frac{m\varphi \pm \mu'\pi}{n} \pm \lambda\pi \right).$$

Ist nun λ eine gerade Zahl, so ist

$$\cos \frac{m\varphi + 2x\pi}{n} = \cos \frac{m\varphi \pm \mu'\pi}{n}$$

$$\sin \frac{m\varphi + 2x\pi}{n} = \sin \frac{m\varphi \pm \mu'\pi}{n},$$

Und folglich

$$\cos \frac{m\varphi + 2x\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi + 2x\pi}{n} \sqrt{-1}$$

$$= \cos \frac{m\varphi \pm \mu'\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi \pm \mu'\pi}{n} \sqrt{-1},$$

$$\cos \frac{m\varphi + 2x\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi + 2x\pi}{n} \sqrt{-1}$$

$$= \cos \frac{m\varphi \pm \mu'\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi \pm \mu'\pi}{n} \sqrt{-1},$$

wobei man zu bemerken hat, dass in diesem Falle, wegen der Gleichung

Für

$$(\cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1})^{\frac{n}{n}}$$

erhält man auf diese Weise die folgenden Werthe:

$$\cos \frac{m\varphi}{n} + \sin \frac{m\varphi}{n} \sqrt{-1},$$

$$\cos \frac{m\varphi \pm 2\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi \pm 2\pi}{n} \sqrt{-1},$$

$$\cos \frac{m\varphi \pm 4\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi \pm 4\pi}{n} \sqrt{-1},$$

$$\cos \frac{m\varphi \pm 6\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi \pm 6\pi}{n} \sqrt{-1}$$

u. s. w.

$$\cos \frac{m\varphi \pm (n-1)\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi \pm (n-1)\pi}{n} \sqrt{-1};$$

und eben so ergeben sich für

$$(\cos \varphi - \sin \varphi \sqrt{-1})^{\frac{n}{n}}$$

die folgenden Werthe:

$$\cos \frac{m\varphi}{n} - \sin \frac{m\varphi}{n} \sqrt{-1},$$

$$\cos \frac{m\varphi \pm 2\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi \pm 2\pi}{n} \sqrt{-1},$$

$$\cos \frac{m\varphi \pm 4\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi \pm 4\pi}{n} \sqrt{-1},$$

$$\cos \frac{m\varphi \pm 6\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi \pm 6\pi}{n} \sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos \frac{m\varphi \pm (n-1)\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi \pm (n-1)\pi}{n} \sqrt{-1}.$$

In jeder dieser beiden Reihen sind offenbar n Werthe enthalten, und es fragt sich nun, ob in jeder derselben alle darin enthaltenen n Werthe sämtlich unter einander ungleich sind. Sollten aber in einer der beiden Reihen zwei Werthe einander gleich sein, so müsste, indem weder $2\lambda'$, noch $2\lambda''$ grösser als $n-1$ ist, entweder zugleich

$$\cos \frac{m\varphi \pm 2\lambda'\pi}{n} = \cos \frac{m\varphi \pm 2\lambda''\pi}{n}, \quad \sin \frac{m\varphi \pm 2\lambda'\pi}{n} = \sin \frac{m\varphi \pm 2\lambda''\pi}{n}$$

oder zugleich

$$\cos \frac{m\varphi \pm 2\lambda'\pi}{n} = \cos \frac{m\varphi \mp 2\lambda''\pi}{n}, \quad \sin \frac{m\varphi \pm 2\lambda'\pi}{n} = \sin \frac{m\varphi \mp 2\lambda''\pi}{n}$$

sein. Im ersten Falle erhält man wie in I.

$$\pm (\lambda' - \lambda'') = \pi n,$$

im zweiten dagegen

$$\pm (\lambda' + \lambda'') = xn.$$

Beides ist unmöglich, weil weder λ' , noch λ'' grösser als $\frac{1}{2}(n-1)$ ist. Daher sind die in jeder der beiden obigen Reihen enthaltenen Werthe sämmtlich unter einander ungleich. Die erste Reihe liefert n sämmtlich unter einander ungleiche Werthe von

$$(\cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1})^{\frac{n}{2}};$$

die zweite Reihe liefert n sämmtlich unter einander ungleiche Werthe von

$$(\cos \varphi - \sin \varphi \sqrt{-1})^{\frac{n}{2}}.$$

III. Fasst man alles Vorhergehende zusammen, so ergibt sich, dass man, um die sämmtlichen n unter einander ungleichen Werthe der Grösse

$$(\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1})^{\frac{n}{2}}$$

zu erhalten, in der Gleichung

$$(\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1})^{\frac{n}{2}} = \cos \frac{m\varphi + 2x\pi}{n} \pm \sin \frac{m\varphi + 2x\pi}{n} \sqrt{-1}$$

die Grösse x nicht grösser als $+\frac{1}{2}n$ und nicht kleiner als $-\frac{1}{2}n$ zu nehmen braucht, so dass man also für x immer bloss alle die von $-\frac{1}{2}n$ bis $+\frac{1}{2}n$ sich findenden ganzen Zahlen zu setzen braucht, wobei man jedoch zu bemerken hat, dass, wenn n eine gerade Zahl ist, der erste und letzte der auf diese Weise erhaltenen Werthe von

$$(\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1})^{\frac{n}{2}}$$

einander gleich sind, in dem in Rede stehenden Falle folglich immer der eine der beiden in Rede stehenden äussersten Werthe, etwa der letzte, d. i. der dem Werthe $+\frac{1}{2}n$ von x entsprechende Werth, weggelassen werden muss. Befolgt man diese Regeln, so erhält man immer n sämmtlich unter einander ungleiche Werthe von

$$(\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1})^{\frac{n}{2}}.$$

§. 57.

I. Soll man die imaginären Grössen

$$\alpha \pm \beta \sqrt{-1}, \alpha_1 \pm \beta_1 \sqrt{-1}, \alpha_2 \pm \beta_2 \sqrt{-1}, \alpha_3 \pm \beta_3 \sqrt{-1}, \dots$$

in einander multipliciren, so bringe man dieselben zuvörderst nach §. 52. auf die Form

$$\begin{aligned} &\varrho (\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1}), \\ &\varrho_1 (\cos \varphi_1 \pm \sin \varphi_1 \sqrt{-1}), \\ &\varrho_2 (\cos \varphi_2 \pm \sin \varphi_2 \sqrt{-1}), \\ &\varrho_3 (\cos \varphi_3 \pm \sin \varphi_3 \sqrt{-1}), \end{aligned}$$

u. s. w.

Dann ist nach §. 53.

$$(\alpha \pm \beta \sqrt{-1}) (\alpha_1 \pm \beta_1 \sqrt{-1}) (\alpha_2 \pm \beta_2 \sqrt{-1}) (\alpha_3 \pm \beta_3 \sqrt{-1}) \dots \\ = \varrho \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 \dots \{ \cos (\varphi + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots) \pm \sin (\varphi + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots) \sqrt{-1} \}.$$

II. Soll man die imaginäre Grösse $\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$ durch die imaginäre Grösse $\alpha_1 \pm \beta_1 \sqrt{-1}$ dividiren; so bringe man diese beiden Grössen nach §. 52. erst respective auf die Form

$$\varrho (\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1}) \text{ und } \varrho_1 (\cos \varphi_1 \pm \sin \varphi_1 \sqrt{-1}).$$

Dann ist

$$\frac{\alpha \pm \beta \sqrt{-1}}{\alpha_1 \pm \beta_1 \sqrt{-1}} = \frac{\varrho}{\varrho_1} \cdot \frac{\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1}}{\cos \varphi_1 \pm \sin \varphi_1 \sqrt{-1}}$$

oder

$$\frac{\alpha \pm \beta \sqrt{-1}}{\alpha_1 \pm \beta_1 \sqrt{-1}} = \frac{\varrho}{\varrho_1} (\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1}) (\cos \varphi_1 \pm \sin \varphi_1 \sqrt{-1})^{-1}.$$

Weil nun aber nach §. 54.

$$(\cos \varphi_1 \pm \sin \varphi_1 \sqrt{-1})^{-1} = \cos \varphi_1 \mp \sin \varphi_1 \sqrt{-1}$$

ist; so ist

$$\frac{\alpha \pm \beta \sqrt{-1}}{\alpha_1 \pm \beta_1 \sqrt{-1}} = \frac{\varrho}{\varrho_1} (\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1}) (\cos \varphi_1 \mp \sin \varphi_1 \sqrt{-1})$$

oder

$$\frac{\alpha \pm \beta \sqrt{-1}}{\alpha_1 \pm \beta_1 \sqrt{-1}} = \frac{\varrho}{\varrho_1} (\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1}) \{ \cos (-\varphi_1) \pm \sin (-\varphi_1) \sqrt{-1} \},$$

und folglich nach §. 53.

$$\frac{\alpha \pm \beta \sqrt{-1}}{\alpha_1 \pm \beta_1 \sqrt{-1}} = \frac{\varrho}{\varrho_1} \{ \cos (\varphi - \varphi_1) \pm \sin (\varphi - \varphi_1) \sqrt{-1} \}.$$

III. Soll man die imaginäre Grösse $\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$ auf die n te Potenz, wo n eine positive oder negative ganze Zahl sein soll, erheben; so bringe man dieselbe nach §. 52. wieder zuerst auf die Form

$$\varrho (\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1}).$$

Dann ist

$$(\alpha \pm \beta \sqrt{-1})^n = \varrho^n (\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1})^n,$$

und folglich nach §. 54.

$$(\alpha \pm \beta \sqrt{-1})^n = \varrho^n (\cos n\varphi \pm \sin n\varphi \sqrt{-1}),$$

IV. Auch wenn man die imaginäre Grösse $\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$ auf die Potenz mit dem Exponenten $\frac{m}{n}$ erheben soll, bringe man dieselbe nach §. 52. zuerst auf die Form

$$\varrho (\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1}),$$

und unterscheide dann die folgenden Fälle.

1. Wenn n eine gerade Zahl ist; so hat nach §. 56.

$$(\alpha + \beta\sqrt{-1})^{\frac{n}{2}}$$

die folgenden n sämmtlich von einander verschiedenen Werthe:

$$\pm \varrho^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{m\varphi}{n} + \sin \frac{m\varphi}{n} \sqrt{-1} \right),$$

$$\varrho^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{m\varphi \pm 2\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi \pm 2\pi}{n} \sqrt{-1} \right),$$

$$\varrho^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{m\varphi \pm 4\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi \pm 4\pi}{n} \sqrt{-1} \right),$$

$$\varrho^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{m\varphi \pm 6\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi \pm 6\pi}{n} \sqrt{-1} \right),$$

u. s. w.

$$\varrho^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{m\varphi \pm (n-2)\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi \pm (n-2)\pi}{n} \sqrt{-1} \right);$$

und

$$(\alpha - \beta\sqrt{-1})^{\frac{n}{2}}$$

hat die folgenden n sämmtlich unter einander ungleichen Werthe

$$\pm \varrho^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{m\varphi}{n} - \sin \frac{m\varphi}{n} \sqrt{-1} \right),$$

$$\varrho^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{m\varphi \pm 2\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi \pm 2\pi}{n} \sqrt{-1} \right),$$

$$\varrho^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{m\varphi \pm 4\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi \pm 4\pi}{n} \sqrt{-1} \right),$$

$$\varrho^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{m\varphi \pm 6\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi \pm 6\pi}{n} \sqrt{-1} \right),$$

u. s. w.

$$\varrho^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{m\varphi \pm (n-2)\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi \pm (n-2)\pi}{n} \sqrt{-1} \right).$$

2. Wenn n eine ungerade Zahl ist; so hat

$$(\alpha + \beta\sqrt{-1})^{\frac{n}{2}}$$

die folgenden n sämmtlich unter einander ungleichen Werthe:

$$\varrho^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{m\varphi}{n} + \sin \frac{m\varphi}{n} \sqrt{-1} \right),$$

$$\varrho^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{m\varphi \pm 2\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi \pm 2\pi}{n} \sqrt{-1} \right),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}} \left(\cos \frac{m\varphi \pm 4\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi \pm 4\pi}{n} \sqrt{-1} \right),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}} \left(\cos \frac{m\varphi \pm 6\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi \pm 6\pi}{n} \sqrt{-1} \right),$$

u. s. w.

$$\varrho^{\frac{m}{n}} \left(\cos \frac{m\varphi \pm (n-1)\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi \pm (n-1)\pi}{n} \sqrt{-1} \right);$$

$$(\alpha - \beta \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

folgenden n sämmtlich unter einander ungleichen Werthe:

$$\varrho^{\frac{m}{n}} \left(\cos \frac{m\varphi}{n} - \sin \frac{m\varphi}{n} \sqrt{-1} \right),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}} \left(\cos \frac{m\varphi \pm 2\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi \pm 2\pi}{n} \sqrt{-1} \right),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}} \left(\cos \frac{m\varphi \pm 4\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi \pm 4\pi}{n} \sqrt{-1} \right),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}} \left(\cos \frac{m\varphi \pm 6\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi \pm 6\pi}{n} \sqrt{-1} \right),$$

u. s. w.

$$\varrho^{\frac{m}{n}} \left(\cos \frac{m\varphi \pm (n-1)\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi \pm (n-1)\pi}{n} \sqrt{-1} \right).$$

Da nun aber für jedes ψ und ψ_1 bekanntlich

$$(\cos \psi \pm \sin \psi \sqrt{-1}) (\cos \psi_1 \pm \sin \psi_1 \sqrt{-1})$$

$$= \cos (\psi + \psi_1) \pm \sin (\psi + \psi_1) \sqrt{-1}$$

kann man, wenn der Kürze wegen

$$\frac{m\varphi}{n} + \sin \frac{m\varphi}{n} \sqrt{-1} = \Phi, \quad \cos \frac{m\varphi}{n} - \sin \frac{m\varphi}{n} \sqrt{-1} = \Phi_1,$$

wird, die obigen Werthe von

$$(\alpha \pm \beta \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

auf folgende Art ausdrücken.

Wenn n eine gerade Zahl ist; so hat

$$(\alpha + \beta \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

genden n sämmtlich unter einander ungleichen Werthe:

$$\pm \varrho^{\frac{m}{n}} \Phi,$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}} \Phi \left(\cos \frac{2\pi}{n} \pm \sin \frac{2\pi}{n} \sqrt{-1} \right),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}} \Phi \left(\cos \frac{4\pi}{n} \pm \sin \frac{4\pi}{n} \sqrt{-1} \right),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}} \Phi \left(\cos \frac{6\pi}{n} \pm \sin \frac{6\pi}{n} \sqrt{-1} \right),$$

u. s. w.

$$\varrho^{\frac{m}{n}} \Phi \left(\cos \frac{(n-2)\pi}{n} \pm \sin \frac{(n-2)\pi}{n} \sqrt{-1} \right).$$

Dagegen hat

$$(\alpha - \beta \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

die folgenden n sämmtlich unter einander ungleichen Werthe:

$$\pm \varrho^{\frac{m}{n}} \Phi_1,$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}} \Phi_1 \left(\cos \frac{2\pi}{n} \pm \sin \frac{2\pi}{n} \sqrt{-1} \right),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}} \Phi_1 \left(\cos \frac{4\pi}{n} \pm \sin \frac{4\pi}{n} \sqrt{-1} \right),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}} \Phi_1 \left(\cos \frac{6\pi}{n} \pm \sin \frac{6\pi}{n} \sqrt{-1} \right),$$

u. s. w.

$$\varrho^{\frac{m}{n}} \Phi_1 \left(\cos \frac{(n-2)\pi}{n} \pm \sin \frac{(n-2)\pi}{n} \sqrt{-1} \right).$$

2. Wenn n eine ungerade Zahl ist; so hat

$$(\alpha + \beta \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

die folgenden n sämmtlich unter einander ungleichen Werthe:

$$\varrho^{\frac{m}{n}} \Phi,$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}} \Phi \left(\cos \frac{2\pi}{n} \pm \sin \frac{2\pi}{n} \sqrt{-1} \right),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}} \Phi \left(\cos \frac{4\pi}{n} \pm \sin \frac{4\pi}{n} \sqrt{-1} \right),$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}} \Phi \left(\cos \frac{6\pi}{n} \pm \sin \frac{6\pi}{n} \sqrt{-1} \right),$$

u. s. w.

$$\rho^{\frac{m}{n}} \Phi \left(\cos \frac{(n-1)\pi}{n} \pm \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \sqrt{-1} \right).$$

Dagegen hat

$$(\alpha - \beta \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

folgenden n sämtlich unter einander ungleichen Werthe:

$$\rho^{\frac{m}{n}} \Phi_1,$$

$$\rho^{\frac{m}{n}} \Phi_1 \left(\cos \frac{2\pi}{n} \pm \sin \frac{2\pi}{n} \sqrt{-1} \right),$$

$$\rho^{\frac{m}{n}} \Phi_1 \left(\cos \frac{4\pi}{n} \pm \sin \frac{4\pi}{n} \sqrt{-1} \right),$$

$$\rho^{\frac{m}{n}} \Phi_1 \left(\cos \frac{6\pi}{n} \pm \sin \frac{6\pi}{n} \sqrt{-1} \right),$$

u. s. w.

$$\rho^{\frac{m}{n}} \Phi_1 \left(\cos \frac{(n-1)\pi}{n} \pm \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \sqrt{-1} \right).$$

§. 58.

Lehrsatz. Der Modulus des Products zweier imaginären Grössen ist das Product der Moduli der beiden imaginären Factoren.

Beweis. Die beiden gegebenen imaginären Grössen seien

$$\alpha + \beta \sqrt{-1}, \alpha_1 + \beta_1 \sqrt{-1};$$

sind die Moduli respective

$$(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}, (\alpha_1^2 + \beta_1^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Das Product der beiden in Rede stehenden imaginären Grössen nach §. 51. 3.

$$\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1 + (\alpha\beta_1 + \beta\alpha_1)\sqrt{-1},$$

der Modulus dieses Products ist also

$$\{(\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1)^2 + (\alpha\beta_1 + \beta\alpha_1)^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Weil nun aber, wie man leicht findet,

$$(\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1)^2 + (\alpha\beta_1 + \beta\alpha_1)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha_1^2 + \beta_1^2)$$

ist; so ist auch

$$\{(\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1)^2 + (\alpha\beta_1 + \beta\alpha_1)^2\}^{\frac{1}{2}} = (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} (\alpha_1^2 + \beta_1^2)^{\frac{1}{2}},$$

woraus die Richtigkeit des Satzes unmittelbar erhellet.

§. 59.

Zusatz. Der Modulus des Products einer beliebigen Anzahl imaginärer Grössen ist das Product der Moduli aller imaginären Factoren.

en wir $OR = OR', O_1R = O_1R', O_2R = O_2R',$ u. s. w.
 die Gleichung 6. geht in folgende über:

$$\left\{ \frac{OR \cdot O_1R \cdot O_2R \cdot \dots \cdot O_nR}{O_1R \cdot O_2R \cdot \dots \cdot O_{n+1}R} \right\} = \left\{ \frac{OP \cdot OP' \cdot OQ \cdot OQ' \cdot \dots \cdot O_nP_n \cdot O_nP'_n \cdot O_nQ_n \cdot O_nQ'_n}{OP_1 \cdot OP'_1 \cdot OQ_1 \cdot OQ'_1 \cdot \dots \cdot O_{n+1}P_{n+1} \cdot O_{n+1}P'_{n+1} \cdot O_{n+1}Q_{n+1} \cdot O_{n+1}Q'_{n+1}} \right\} \quad 7)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{1.} \\ \text{2.} \end{array} \right\} \text{ :}$$

§. 4.

Um geometrische Ausdrücke für die vier noch unbestimmten Coefficienten F, E', D, F' zu erhalten, kehren wir zu der Gleichung §. 1. 2. zurück, und setzen in jene nacheinander $x', y; x', y''; x'', y; x'', y''$; bezeichnen alsdann die Wurzeln der resultirenden Gleichungen respective mit $x'_1, x'_2, x'_3; x''_1, x''_2, x''_3; x'''_1, x'''_2, x'''_3; x^{IV}_1, x^{IV}_2, x^{IV}_3$; so haben wir zufolge der Eigenschaften der cubischen Gleichungen:

$$x'_1 x'_2 + x'_1 x'_3 + x'_2 x'_3 = 3(Ey'^2 + Fx'y' + Gx'^2 + F'y' + E'x' + A'') \dots\dots 1)$$

$$x''_1 x''_2 + x''_1 x''_3 + x''_2 x''_3 = 3(Ey'^2 + Fx'y' + Gx'^2 + Fy' + Ex' + A') \dots\dots 2)$$

$$x''_1 x''_2 + x''_1 x''_3 + x''_2 x''_3 = 3(Ey'^2 + Fx''y' + Gx''^2 + F'y' + E'x'' + A') \dots\dots 3)$$

$$x^{IV}_1 x^{IV}_2 + x^{IV}_1 x^{IV}_3 + x^{IV}_2 x^{IV}_3 = 3(Ey''^2 + Fx''y'' + Gx''^2 + F'y'' + E'x'' + A'') \dots\dots 4$$

Subtrahiren wir die erste von der zweiten, und dividiren den Rest durch $y' - y$, so ist

$$\frac{x''_1 x''_2 - x'_1 x'_2 + x''_1 x''_2 - x'_1 x'_2 + x''_2 x''_2 - x'_2 x'_2}{3(y' - y')} = E(y'' + y') + Fx' + F' \dots 5)$$

Aus der Subtraction der 3ten von der 4ten Gleichung folgt:

$$\frac{x^{IV}_1 x^{IV}_2 - x'''_1 x'''_2 + x^{IV}_1 x^{IV}_2 - x'''_1 x'''_2 + x^{IV}_2 x^{IV}_2 - x'''_2 x'''_2}{3(y'' - y')} = E(y'' + y') + Fx'' + F' \dots 6)$$

Ziehen wir endlich die Gleichung 5) von der Gleichung 6) ab, so ist:

$$F = \frac{x^{IV}_1 x^{IV}_2 - x'''_1 x'''_2 - x''_1 x''_2 + x'_1 x'_2 + x^{IV}_1 x^{IV}_2 - x'''_1 x'''_2 - x''_1 x''_2 + x'_1 x'_2 + x^{IV}_2 x^{IV}_2 - x'''_2 x'''_2 - x''_2 x''_2 + x'_2 x'_2}{3(y' - y')(x'' - x')} \dots 7)$$

$$F = \left\{ \begin{aligned} & + \frac{(S'_1 T''_2)^2 + (S''_1 T''_2)^2 + (S'_2 T''_2)^2 - \{(S'_1 T')^2 + (S'_1 T'_2)^2 + (S'_1 T'_2)^2\}}{3p''p} \\ & - \frac{\{m'''_1 n'''_1 + m'''_2 n'''_2 + m'''_3 n'''_3\} (K'P'' + K'P) OR \cdot OK \cdot OK'}{3p''p \cdot OQ \cdot OQ \cdot OQ'} \\ & - \frac{(s^{IV}_1 s'''_1)^2 \cdot OK'}{3p'p \cdot p''p} \end{aligned} \right\} \dots 10)$$

Auch in diesem Ausdrucke kann das erste Glied des zweiten Theils, wie in 8., einfacher dargestellt werden. Subtrahiren wir 2. von 4. und dividiren den Rest mit $3(x'' - x')$, so ist:

$$E + G(x'' + x') + Fy' = \frac{z^{IV}_1 z^{IV}_2 + z^{IV}_1 z^{IV}_3 + z^{IV}_2 z^{IV}_3 - \{z''_1 z''_2 + z''_1 z''_3 + z''_2 z''_3\}}{3(x'' - x')}.$$

Substituiren wir hierin den vorhin gefundenen Werth von F , und den in §. 2. 8. angegebenen Werth von G , und gebrauchen die im Anfange dieses Paragraphen angegebenen Bezeichnungen, so erhalten wir wie in 10.

$$E' = \left\{ \begin{aligned} & + \frac{(S^{IV}_1 T^{IV}_2)^2 + (S^{IV}_1 T^{IV}_3)^2 + (S^{IV}_2 T^{IV}_3)^2 - \{(S''_1 T''_2)^2 + (S''_1 T''_3)^2 + (S''_2 T''_3)^2\}}{3P'P} \\ & + \frac{\{\mu'''_1 \nu'''_1 + \mu'''_2 \nu'''_2 + \mu'''_3 \nu'''_3\} (OK' + OK'') OK \cdot OK''}{3\pi\pi' \cdot OP \cdot OP' \cdot OP''} \\ & - \frac{(s^{IV}_1 s''_1)^2 \cdot K' P''}{3P'P \cdot P''P} \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

Um endlich den Coefficienten D' zu bestimmen, setzen wir der Gleichung §. 1. 3. nach einander x', z' ; x'', z'' statt x und so folgt wie oben, dass, wenn wir mit y'_1, y'_2, y'_3 ; y''_1, y''_2, y''_3 die Wurzeln der resultirenden Gleichungen bezeichnen:

$$y'_1 y'_2 + y'_1 y'_3 + y'_2 y'_3 = 3 \left\{ \frac{A}{B} z'^2 + \frac{F}{B} x' z' + \frac{L}{B} x'^2 + \frac{F'}{B} z' + \frac{D'}{B} x' + \frac{B'}{B} \right\} 1$$

$$y''_1 y''_2 + y''_1 y''_3 + y''_2 y''_3 = 3 \left\{ \frac{A}{B} z''^2 + \frac{F}{B} x'' z'' + \frac{L}{B} x''^2 + \frac{F'}{B} z'' + \frac{D'}{B} x'' + \frac{B''}{B} \right\} 1$$

Diese Gleichungen von einander subtrahirt, und den Rest $3(x'' - x')$ dividirt, geben:

$$+\frac{L}{B}(x''+x')+\frac{F}{B}x'=\frac{y''_1y''_2+y''_1y''_3+y''_2y''_3-\{y'_1y'_2+y'_1y'_3+y'_2y'_3\}}{3(x''-x')}.$$

s dieser Gleichung finden wir durch Einführung der Werthe von y'_2 , u. s. w., ferner von B , L und F , folgenden Werth von D :

$$D = \left\{ \frac{OR \cdot OR \cdot OR''}{0Q \cdot 0Q \cdot 0Q''} \cdot \frac{p''m''_1 p''m''_2 + p''m''_1 p''m''_3 + p''m''_2 p''m''_3 - (p'm'_1 p'm'_2 + p'm'_1 p'm'_3 + p'm'_2 p'm'_3)}{3p''p''} - \frac{(s''_1 s''_1) \cdot P M''_1}{3p''p'' \cdot p''p''} \cdot \frac{(\mu''_1 y''_1 + \mu''_2 y''_2 + \mu''_3 y''_3) (OK'' + OK') \cdot OR \cdot OK \cdot OK''}{3\pi''\pi'' \cdot OP \cdot OP \cdot OP''} \right\}$$

oder

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f\{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}\}}{\Delta\{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}\}} \cdot \left\{ \frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta\psi(x)}{\Delta x} \sqrt{-1} \right\}$$

gesetzt werden kann, so ist nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\Delta f\{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}\}}{\Delta\{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}\}} \cdot \left\{ \frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta\psi(x)}{\Delta x} \sqrt{-1} \right\} = \frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta\Psi(x)}{\Delta x} \sqrt{-1}$$

oder

$$\frac{\Delta f\{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}\}}{\Delta\{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}\}} = \frac{\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta\Psi(x)}{\Delta x} \sqrt{-1}}{\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta\psi(x)}{\Delta x} \sqrt{-1}}$$

Lässt man nun Δx sich der Null nähern, so nähern

$$\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}, \frac{\Delta\psi(x)}{\Delta x} \text{ und } \frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}, \frac{\Delta\Psi(x)}{\Delta x}$$

sich bekanntlich respective den Gränzen

$$\varphi'(x), \psi'(x) \text{ und } \Phi'(x), \Psi'(x),$$

und

$$\frac{\Delta f\{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}\}}{\Delta\{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}\}}$$

nähert sich also nach dem Obigen der Gränze

$$\frac{\Phi'(x) + \Psi'(x)\sqrt{-1}}{\varphi'(x) + \psi'(x)\sqrt{-1}}.$$

Weil

$$\Delta\{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}\} = \Delta\varphi(x) + \Delta\psi(x)\sqrt{-1}$$

ist, so nähert sich

$$\Delta\{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}\}$$

offenbar der Null, wenn Δx sich der Null nähert, und

$$\frac{\Phi'(x) + \Psi'(x)\sqrt{-1}}{\varphi'(x) + \psi'(x)\sqrt{-1}}$$

ist also die Gränze, welcher

$$\frac{\Delta f\{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}\}}{\Delta\{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}\}}$$

sich nähert, wenn

$$\Delta\{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}\}$$

sich der Null nähert. Weil nun nach den Grundbegriffen der Differentialrechnung letztere Gränze

$$f'\{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}\}$$

ist, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{\Phi'(x) + \Psi'(x)\sqrt{-1}}{\varphi'(x) + \psi'(x)\sqrt{-1}} = f\{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}\}$$

oder

$$\Phi'(x) + \Psi'(x)\sqrt{-1} = \{\varphi'(x) + \psi'(x)\sqrt{-1}\} f\{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}\}.$$

Wegen der Gleichung

$$y = \Phi(x) + \Psi(x)\sqrt{-1}$$

ist aber

$$\frac{dy}{dx} = \Phi'(x) + \Psi'(x)\sqrt{-1},$$

und die vorige Gleichung kann daher auch unter der folgenden Form geschrieben werden:

$$\frac{dy}{dx} = \{\varphi'(x) + \psi'(x)\sqrt{-1}\} f\{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}\}.$$

§. 8.

Sind jetzt a und x beliebige reelle oder imaginäre Grössen, so kann nach XL. §. 52.

$$x - a = r(\cos \omega + \sin \omega \sqrt{-1}),$$

also

$$x = a + r(\cos \omega + \sin \omega \sqrt{-1}),$$

und folglich

$$f(x) = f\{a + r(\cos \omega + \sin \omega \sqrt{-1})\}$$

gesetzt werden.

Sei nun

$$f(x) = f\{a + r(\cos \omega + \sin \omega \sqrt{-1})\} = \varphi(r) + \psi(r)\sqrt{-1};$$

so ist nach §. 6., wenn die Functionen $\varphi(r)$, $\varphi'(r)$ und $\psi(r)$, $\psi'(r)$ zwischen den Gränzen 0 und r stetig sind,

$$f(x) = \varphi(0) + r\varphi'(\Theta r) + \{\psi(0) + r\psi'(\Theta_1 r)\}\sqrt{-1}$$

oder

$$f(x) = \varphi(0) + \psi(0)\sqrt{-1} + r\{\varphi'(\Theta r) + \psi'(\Theta_1 r)\sqrt{-1}\},$$

wo Θ und Θ_1 gewisse positive die Einheit nicht übersteigende Grössen sind. Nach dem Obigen ist aber

$$r = \frac{x - a}{\cos \omega + \sin \omega \sqrt{-1}}.$$

und

$$f(a) = \varphi(0) + \psi(0)\sqrt{-1};$$

also ist

$$f(x) = f(a) + (x - a) \frac{\varphi'(\Theta r) + \psi'(\Theta_1 r)\sqrt{-1}}{\cos \omega + \sin \omega \sqrt{-1}}.$$

$$\frac{\Phi'(x) + \Psi'(x)\sqrt{-1}}{\varphi'(x) + \psi'(x)\sqrt{-1}} = f'\{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}\}$$

ler

$$\Phi'(x) + \Psi'(x)\sqrt{-1} = \{\varphi'(x) + \psi'(x)\sqrt{-1}\} f'\{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}\}.$$

Wegen der Gleichung

$$y = \Phi(x) + \Psi(x)\sqrt{-1}$$

t aber

$$\frac{dy}{dx} = \Phi'(x) + \Psi'(x)\sqrt{-1},$$

und die vorige Gleichung kann daher auch unter der folgenden Form geschrieben werden:

$$\frac{dy}{dx} = \{\varphi'(x) + \psi'(x)\sqrt{-1}\} f'\{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}\}.$$

§. 8.

Sind jetzt a und x beliebige reelle oder imaginäre Grössen, so kann nach XL. §. 52.

$$x - a = r(\cos \omega + \sin \omega \sqrt{-1}),$$

also

$$x = a + r(\cos \omega + \sin \omega \sqrt{-1}),$$

und folglich

$$f(x) = f\{a + r(\cos \omega + \sin \omega \sqrt{-1})\}$$

gesetzt werden.

Sei nun

$$f(x) = f\{a + r(\cos \omega + \sin \omega \sqrt{-1})\} = \varphi(r) + \psi(r)\sqrt{-1};$$

so ist nach §. 6., wenn die Functionen $\varphi(r)$, $\varphi'(r)$ und $\psi(r)$, $\psi'(r)$ zwischen den Gränzen 0 und r stetig sind,

$$f(x) = \varphi(0) + r\varphi'(\Theta r) + \{\psi(0) + r\psi'(\Theta_1 r)\}\sqrt{-1}$$

der

$$f(x) = \varphi(0) + \psi(0)\sqrt{-1} + r\{\varphi'(\Theta r) + \psi'(\Theta_1 r)\sqrt{-1}\},$$

wo Θ und Θ_1 gewisse positive die Einheit nicht übersteigende Grössen sind. Nach dem Obigen ist aber

$$r = \frac{x - a}{\cos \omega + \sin \omega \sqrt{-1}}.$$

und

$$f(a) = \varphi(0) + \psi(0)\sqrt{-1};$$

also ist

$$f(x) = f(a) + (x - a) \frac{\varphi'(\Theta r) + \psi'(\Theta_1 r)\sqrt{-1}}{\cos \omega + \sin \omega \sqrt{-1}}.$$

$$\psi(r) =$$

$$\frac{\mathfrak{F}(x)}{n} \left\{ \sum_{q=0}^{q=\infty} r^{-q} x^q + \sum_{q=0}^{q=\infty} \Theta^{-q} r^{-q} x^q + \dots + \sum_{q=0}^{q=\infty} \Theta^{-(n-1)q} r^{-q} x^q \right\},$$

oder, weil der Factor $r^{-q} x^q$ unter allen Summenzeichen vorkommt, wie sogleich erhellen wird,

$$\psi(r) = \frac{\mathfrak{F}(x)}{n} \sum_{q=0}^{q=\infty} \{1 + \Theta^{-q} + \Theta^{-2q} + \Theta^{-3q} + \dots + \Theta^{-(n-1)q}\} r^{-q} x^q,$$

oder auch

$$\psi(r) = \mathfrak{F}(x) \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1 + \Theta^{-q} + \Theta^{-2q} + \Theta^{-3q} + \dots + \Theta^{-(n-1)q}}{n} r^{-q} x^q.$$

Weil bekanntlich

$$\Theta = \cos \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} \sqrt{-1},$$

und folglich nach bekannten Sätzen von den imaginären Grössen (XL. §. 54.)

$$1 + \Theta^{-q} + \Theta^{-2q} + \Theta^{-3q} + \dots + \Theta^{-(n-1)q}$$

$$= 1 + \cos \frac{2q\pi}{n} - \sin \frac{2q\pi}{n} \sqrt{-1}$$

$$+ \cos \frac{4q\pi}{n} - \sin \frac{4q\pi}{n} \sqrt{-1}$$

$$+ \cos \frac{6q\pi}{n} - \sin \frac{6q\pi}{n} \sqrt{-1}$$

u. s. w.

$$+ \cos \frac{2(n-1)q\pi}{n} - \sin \frac{2(n-1)q\pi}{n} \sqrt{-1} =$$

ist, so ist klar, dass für jeden durch n ohne Rest theilbaren Werth von q

$$1 + \Theta^{-q} + \Theta^{-2q} + \Theta^{-3q} + \dots + \Theta^{-(n-1)q} = n,$$

und folglich

$$\frac{1 + \Theta^{-q} + \Theta^{-2q} + \Theta^{-3q} + \dots + \Theta^{-(n-1)q}}{n} = 1$$

ist. Weil ferner nach der Lehre von den geometrischen Progressionen

$$1 + \Theta^{-q} + \Theta^{-2q} + \Theta^{-3q} + \dots + \Theta^{-(n-1)q} = \frac{1 - \Theta^{-nq}}{1 - \Theta^{-q}},$$

also diese Summe der Grösse

$$\frac{1 - (\cos \frac{2nq\pi}{n} - \sin \frac{2nq\pi}{n} \sqrt{-1})}{1 - (\cos \frac{2q\pi}{n} - \sin \frac{2q\pi}{n} \sqrt{-1})},$$

d. h. der Grösse

$$\frac{0}{1 - (\cos \frac{2q\pi}{n} - \sin \frac{2q\pi}{n} \sqrt{-1})}$$

$$\frac{(r_1)^{n+1} \cos(k+1) \pi \omega_1 + \sin(k+1) \pi \omega_1 \cdot \sqrt{-1}}{1 - \left(\frac{r_1}{r}\right)^n (\cos \pi \omega_1 + \sin \pi \omega_1 \sqrt{-1})}$$

$$= \frac{1}{1 - \left(\frac{r_1}{r}\right)^n}$$

$$\frac{(\cos(k+1) \pi \omega_1 - \left(\frac{r_1}{r}\right)^n \cos k \pi \omega_1)}{1 - 2 \left(\frac{r_1}{r}\right)^n \cos \pi \omega_1 + \left(\frac{r_1}{r}\right)^{2n}}$$

$$+ \frac{\sin(k+1) \pi \omega_1 - \left(\frac{r_1}{r}\right)^n \sin k \pi \omega_1}{1 - 2 \left(\frac{r_1}{r}\right)^n \cos \pi \omega_1 + \left(\frac{r_1}{r}\right)^{2n}} \sqrt{-1} \Bigg\}$$

Wenn man auch der Voraussetzung $r_1 < r$ ist, so nähert sich der Ausdruck des Ausdrucks auf der rechten Seite der Gleichheit Null, wenn n wächst, und kann derselbe beliebig nahe Null werden, wenn man nur n gross genug nimmt, woraus sich

$$\left(\frac{r_1}{r}\right)^n + \left(\frac{r_1}{r}\right)^{2n} + \dots = \frac{1}{1 - \left(\frac{r_1}{r}\right)^n}$$

folgt, dass man hat:

$$\bar{r} = \frac{\bar{r} r_1}{1 - \left(\frac{r_1}{r}\right)^n}$$

oder, was dasselbe heissen kann:

$$\bar{r} = \bar{r} r_1$$

Man kann zeigen, dass aber für ein unendlich grosses n die Grösse \bar{r} eine Wertgrösse zwischen 0 und R oder

$$\bar{r} = \bar{r} r_1 = \bar{r} r_1$$

folgt, dass man aus dem Vorhergehenden ergibt, dass \bar{r} eine Grösse ist, welche eine Mittelgrösse zwischen 0 und R ist.

$$\bar{r} = \bar{r} r_1$$

oder

$$\bar{r} = \bar{r} r_1 + \dots + \bar{r} (r_1^{n-1})$$

$$\bar{r} = \bar{r} r_1 + \dots + \frac{r_1^{n-1}}{r_1 - r_1} \bar{r} (r_1^{n-1})$$

oder, wenn man sich die Grösse

$$\bar{r} = \bar{r} r_1 + \dots + \frac{r_1^{n-1}}{r_1 - r_1} \bar{r} (r_1^{n-1})$$

$$\frac{B^2}{A^2} = \text{tang } {}^2\alpha \text{ und } \frac{1-B^2}{1-A^2} = \text{tang } {}^2\beta.$$

Folglich ist allgemein

$$\text{tang } {}^2\alpha_n : \text{tang } {}^2\beta_n = \text{tang } {}^2\alpha : \text{tang } {}^2\beta.$$

Aus Art. 2 aber folgt

$$\frac{B^2}{A^2} = \frac{\cos {}^2(i+i')}{\cos {}^2(i-i')} \text{ und}$$

$$\frac{1-A^2}{1-B^2} = \cos {}^2(i-i'),$$

mithin ist

$$\text{tang } {}^2\alpha : \text{tang } {}^2\beta = \cos {}^2(i+i'), \text{ also auch}$$

$$\text{tang } {}^2\alpha_n : \text{tang } {}^2\beta_n = \cos {}^2(i+i') \text{ oder}$$

$$\text{tang } \alpha_n = \pm \cos (i+i') \text{ tang } \beta_n \dots (\delta)$$

Beide Azimuthe stehen also immer in dieser einfachen Beziehung zu einander. Jedes ist eine Function des Einfallswinkels und der Plattenzahl, und wir wollen die Gesetze dieser Abhängigkeit zu bestimmen suchen.

10.

Wir haben gefunden

$$\text{tang } \alpha_n = \pm \cos (i+i') \cdot \text{tang } \beta_n.$$

Da

$$\cos (i+i') < 1,$$

so ist

$$\text{tang } \alpha_n < \text{tang } \beta_n, \text{ und}$$

$$\alpha_n < \beta_n$$

unabhängig von i und n .

I. Es sei n constant, i also auch A^2 und B^2 variabel.

a) So oft $A^2 = B^2$, so ist $\text{tang } {}^2\alpha_n = 1 = \text{tang } {}^2\beta_n$, also $\alpha_n = \frac{\pi}{4} = \beta_n$.

b) Ist $i = 0$, so ist $A^2 = B^2$ (Art. 6), mithin $\alpha_n = \frac{\pi}{4} = \beta_n$.

c) Ist $i = \text{arc}(\text{tang} = \mu)$, so ist $B^2 = 0$, folglich auch $B_n^2 = 0$. Und da

$$\text{tang } {}^2\alpha_n = \frac{B_n^2}{A_n^2} \text{ (Art. 9),}$$

so ist für diesen Fall $\text{tang } \alpha_n = 0$, folglich $\alpha_n = 0$. Aber

$$\text{tang } {}^2\beta_n = \frac{1 + (2n-1)A^2}{1-A^2} = 1 + \frac{2nA^2}{1-A^2} > 1, \text{ also}$$

$$\beta_n > \frac{\pi}{4}. \text{ Für } n = \infty \text{ ist } \beta_\infty = \frac{\pi}{2}.$$

d) Ist $i > \text{arc}(\text{tang} = \mu)$, so ist $B^2 > 0$, folglich $B_n^2 > 0$, also $\alpha_n > 0$. Aber $\text{tang } {}^2\beta_n < \infty$, also $\beta_n < \frac{\pi}{2}$.

und hieraus

$$x^2 = \frac{p^{2n}}{1 - p^{2n}} \quad \text{und} \quad z = p^{2n}.$$

folglich

hinzugehen wird:

$$\sin^2 i = \frac{p^{2n}}{1 + p^{2n}} \quad \text{und} \quad z = p^{2n}$$

Durch diese Gleichung $(p^n - 1) \cdot 2 = p^{2n+1}$,
 dem das Licht auf eine beliebige Weise hinzugehen wird:
 muss, damit gleiche Mengen p^n Addition von p^n die Aus-
 gleich aber geht aus der
 Winkel zu finden jeder:

$$1 + 3 + \dots + 2 \cdot p^n \\
= [p(p-1) + 2] + [p^n(p-1) + 4] \\
+ \dots + [p^n(p-1) + 2p^n].$$

oder was dasselbe heißt
 stärkerer auf ein vor
 auffällt.

... der auf einander folgenden
 ... von dem Herrn Herausgeber
 ... emerat worden ist. Demnach ist

Nach den Fresnel'schen
 gespiegelten und d.
 Lichtstärke so la-
 gen Mittels nicht z.
 ganzen Masse voll-
 gen Körper alle-
 oberen Fläche
 kaum ein solet
 der beständig
 leicht eine ve-
 Körpers herv-
 Durchgang
 Betrachte
 zontale
 sigkeit i.
 so müsse
 des ein-
 einen so
 des
 Anze

$$1 + 3 + \dots + [p(p-1) + (2p-1)]$$

$$1 + 3 + 15 + 17$$

$$1 + 3 + 15 + 17$$

$$1 + 3 + 31 + 33 + 35$$

$$1 + 3 + \dots + [n^2(p-1) + (2p^2-1)]$$

... sollten die vorliegenden Lehr-
 ... Anwendung der arithmetischen

LII.

Zur Theorie der bestimmten Integrale.

Von

Herrn O. Schlömilch

zu Weimar.

Die Entwicklung der schönen Theoreme von Lagrange und Fourier beruht bekanntlich auf der Untersuchung der Gränze, welcher sich das bestimmte Integral

$$\int_0^{c \sin(2n+1)\Theta} \frac{\sin \Theta}{\sin \Theta} f(\Theta) d\Theta, \quad \pi > c > 0,$$

für ganze, positive, wachsende n nähert, vorausgesetzt, dass die Funktion $f(\Theta)$ während des Integrationsintervalles weder unendlich gross, noch unstetig werde *).

Diese Aufgabe lässt sich, wie ich glaube, völlig streng und kurz, folgendermassen lösen.

1) Wir nehmen erstlich $c = \frac{\pi}{2}$, $2n + 1 = m$ (der Kürze wegen) und führen in das Integral

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin m\Theta}{\sin \Theta} f(\Theta) d\Theta$$

eine neue Veränderliche $x = m\Theta$, also $\Theta = \frac{x}{m}$, $d\Theta = \frac{dx}{m}$ ein. Dadurch wird

$$J = \int_0^{\frac{m\pi}{2}} \frac{\sin x}{m \sin \frac{x}{m}} f\left(\frac{x}{m}\right) dx.$$

Dieses Integral zerlegen wir in eine Reihe anderer, welche sämtlich nach dem Intervall $\frac{\pi}{2}$ fortschreiten, wobei wir $\frac{\sin x}{m \sin \frac{x}{m}} f\left(\frac{x}{m}\right)$ mit $F(x)$ bezeichnen. Also

* siehe hierüber die vortreffliche Abhandlung des Hrn. Prof. Lejeune *
ichlet im Journal f. r. u. a. Mathematik v. Crelle, B. IV. S. 157.

1) Es sei r endlich, also das zugehörige Glied endlich weit vom Anfange entfernt. Dann ist $r\pi \pm x$ etwas Endliches $= u$,
 $F(r\pi \pm x) = \frac{\sin x}{m \sin \frac{u}{m}} f(\frac{u}{m})$ oder, wenn man den sich hebenden Faktor u einsetzt,

$$\lim F(r\pi \pm x) = \frac{\sin x}{u} \cdot \lim \frac{\frac{u}{m}}{\sin \frac{u}{m}} f(\frac{u}{m}) = \frac{\sin x}{u} f(0)$$

oder

$$\lim F(r\pi \pm x) = \frac{\sin x}{r\pi \pm x} f(0).$$

2) Wäre r so gross, das schon $\frac{r\pi \pm x}{m}$ eine endliche Grösse v wäre, so ist

$$\lim F(r\pi \pm x) = \lim \frac{\sin x}{m \sin v} f(v) = 0,$$

so dass also die unendlich weit vom Anfange entfernten Glieder verschwinden.

So haben wir endlich

$$\lim J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sin x}{x} f(0) + \frac{\sin x}{\pi - x} f(0) - \frac{\sin x}{\pi + x} f(0) - \dots \right] dx$$

oder, weil $f(0)$ eine Constante ist,

$$\begin{aligned} \lim J &= f(0) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\pi + x} - \frac{1}{2\pi - x} + \dots \right] \sin x \, dx \\ &= f(0) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{x} + 2x \left\{ \frac{1}{\pi^2 - x^2} - \frac{1}{4\pi^2 - x^2} + \frac{1}{9\pi^2 - x^2} - \dots \right\} \right] \sin x \, dx. \end{aligned}$$

Um nun dieses Integral weiter ausführen zu können, müssen wir die eingeklammerte Reihe summiren. Diese Summe P kann man aus zwei anderen sich bestehend denken:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{x} - 2x \left\{ \frac{1}{\pi^2 - x^2} + \frac{1}{4\pi^2 - x^2} + \frac{1}{9\pi^2 - x^2} + \dots \right\}, \\ V &= 4x \left\{ \frac{1}{\pi^2 - x^2} + \frac{1}{9\pi^2 - x^2} + \frac{1}{25\pi^2 - x^2} + \dots \right\}, \\ P &= U + V. \end{aligned}$$

Nun findet sich aber leicht

$$\begin{aligned} \int U \, dx &= \log n \, x + \log n \left(\frac{\pi^2 - x^2}{\pi^2} \right) + \log n \left(\frac{4\pi^2 - x^2}{4\pi^2} \right) + \dots \\ &= \log n \, x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2} \right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2} \right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2} \right) \dots \\ &= \log n \sin x; \end{aligned}$$

also durch Differenziation

$$\lim \int_0^c \frac{\sin (2n+1)\frac{\Theta}{2}}{\sin \frac{\Theta}{2}} f(\Theta) d\Theta = \frac{\pi}{2} f(0), \quad \pi > c > 0 \dots (4)$$

Diess ist das schöne Theorem, dessen fruchtbare Anwendung auf der Eigenschaft von $\frac{\sin (2n+1)\frac{\Theta}{2}}{\sin \frac{\Theta}{2}}$ die Reihe

$$1 + 2\{\cos \Theta + \cos 2\Theta + \dots + \cos n\Theta\}$$

zu summiren, beruht. Es lässt sich also vermöge der vorigen Formel jede Reihe summiren, deren allgemeines Glied $\int_0^c f(\Theta) \cos n\Theta d\Theta$, $\pi > c > 0$, ist; oder man hat

$$\int_0^c \frac{\sin (2n+1)\frac{\Theta}{2}}{\sin \frac{\Theta}{2}} f(\Theta) d\Theta = \int_0^c f(\Theta) d\Theta + 2 \sum_1^n \int_0^c f(\Theta) \cos n\Theta d\Theta$$

oder, wenn man die Reihe ins Unendliche fortsetzt, ($n = \infty$ nimmt) und links 2Θ für Θ setzt,

$$\lim 2 \int_0^{\frac{c}{2}} \frac{\sin (2n+1)\Theta}{\sin \Theta} f(2\Theta) d\Theta = \int_0^c f(\Theta) d\Theta + 2 \sum_1^\infty \int_0^c f(\Theta) \cos n\Theta d\Theta$$

wobei links das Resultat $\pi f(0)$ erscheint. Aus diesem Satze lassen sich die Theoreme von Lagrange und Fourier leicht ableiten.

5) Die hier angewandte Methode der Gränzenzerlegung lässt sich mit vielem Vortheil öfter anwenden.

So giebt z. B. das bestimmte Integral $\int_0^{\infty} \frac{\sin \Theta}{\Theta} d\Theta$, wenn man sich die obere Gränze als ein Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ denkt, und es in eine Reihe anderer, sämmtlich von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ genommen, zerlegt, das nämliche Resultat, wie die vorhin geführte Entwicklung, wenn man darin $f(\Theta)$ constant = 1 nimmt. Nämlich

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \Theta}{\Theta} d\Theta = \frac{\pi}{2}.$$

Setzt man $a\Theta$ für Θ , wo a eine ganz beliebige Grösse ist, so hat man auch

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin a\Theta}{a\Theta} d\Theta = \frac{\pi}{2} \dots (5)$$

welches Resultat sich hier auf einem ebenso leichten als gründlichen Wege findet.

natürlich nicht ganz gleiche Bedeutung wie dort haben, nach 1. und 5. die folgenden Gleichungen:

$$13. \quad \begin{cases} \xi = \varrho, & \eta = 0; \\ \xi = a_1 + \varrho_1 \cos \varphi_1, & \eta = b_1 + \varrho_1 \sin \varphi_1; \\ \xi = a_2 + \varrho_2 \cos \varphi_2, & \eta = b_2 + \varrho_2 \sin \varphi_2; \end{cases}$$

und

$$14. \quad \begin{cases} \xi_1 = r \cos \alpha, & \eta_1 = r \sin \alpha; \\ \xi_1 = a_1 + r_1 \cos (\alpha_1 + \varphi_1), & \eta_1 = b_1 + r_1 \sin (\alpha_1 + \varphi_1); \\ \xi_1 = a_2 + r_2 \cos (\alpha_2 + \varphi_2), & \eta_1 = b_2 + r_2 \sin (\alpha_2 + \varphi_2). \end{cases}$$

Dies sind wieder zwölf Gleichungen zwischen den zwölf unbekannten Grössen $\xi, \eta, \xi_1, \eta_1, \varrho, \varrho_1, \varrho_2, r, r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2$, und reichen also zu deren Bestimmung hin, wie wir jetzt mit Mehrerem zeigen wollen.

Durch Elimination von ξ, η, ξ_1, η_1 erhält man

$$\begin{aligned} \varrho &= a_1 + \varrho_1 \cos \varphi_1 = a_2 + \varrho_2 \cos \varphi_2, \\ 0 &= b_1 + \varrho_1 \sin \varphi_1 = b_2 + \varrho_2 \sin \varphi_2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} r \cos \alpha &= a_1 + r_1 \cos (\alpha_1 + \varphi_1) = a_2 + r_2 \cos (\alpha_2 + \varphi_2), \\ r \sin \alpha &= b_1 + r_1 \sin (\alpha_1 + \varphi_1) = b_2 + r_2 \sin (\alpha_2 + \varphi_2). \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} a_1 - \varrho &= -\varrho_1 \cos \varphi_1, & a_2 - \varrho &= -\varrho_2 \cos \varphi_2; \\ b_1 &= -\varrho_1 \sin \varphi_1, & b_2 &= -\varrho_2 \sin \varphi_2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} a_1 - r \cos \alpha &= -r_1 \cos (\alpha_1 + \varphi_1), & a_2 - r \cos \alpha &= -r_2 \cos (\alpha_2 + \varphi_2); \\ b_1 - r \sin \alpha &= -r_1 \sin (\alpha_1 + \varphi_1), & b_2 - r \sin \alpha &= -r_2 \sin (\alpha_2 + \varphi_2). \end{aligned}$$

Dividirt man nun, um die Grössen $\varrho_1, \varrho_2, r_1, r_2$ zu eliminiren, diese Gleichungen durch einander: so erhält man

$$15. \quad \cot \varphi_1 = \frac{a_1 - \varrho}{b_1}, \quad \cot \varphi_2 = \frac{a_2 - \varrho}{b_2}$$

und

$$16. \quad \cot (\alpha_1 + \varphi_1) = \frac{a_1 - r \cos \alpha}{b_1 - r \sin \alpha}, \quad \cot (\alpha_2 + \varphi_2) = \frac{a_2 - r \cos \alpha}{b_2 - r \sin \alpha};$$

und diese vier Gleichungen enthalten nun bloss noch die vier unbekannten Grössen $\varrho, r, \varphi_1, \varphi_2$.

Weil bekanntlich

$$\cot (\alpha_1 + \varphi_1) = \frac{\cot \alpha_1 \cot \varphi_1 - 1}{\cot \alpha_1 + \cot \varphi_1}, \quad \cot (\alpha_2 + \varphi_2) = \frac{\cot \alpha_2 \cot \varphi_2 - 1}{\cot \alpha_2 + \cot \varphi_2}$$

ist, so ist nach 16.

$$\begin{aligned} \frac{a_1 - r \cos \alpha}{b_1 - r \sin \alpha} &= \frac{\cot \alpha_1 \cot \varphi_1 - 1}{\cot \alpha_1 + \cot \varphi_1}, \\ \frac{a_2 - r \cos \alpha}{b_2 - r \sin \alpha} &= \frac{\cot \alpha_2 \cot \varphi_2 - 1}{\cot \alpha_2 + \cot \varphi_2}; \end{aligned}$$

woraus sich

$$17. \begin{cases} \cot \varphi_1 = - \frac{(a_1 - r \cos \alpha) \cos \alpha_1 + (b_1 - r \sin \alpha) \sin \alpha_1}{(a_1 - r \cos \alpha) \sin \alpha_1 - (b_1 - r \sin \alpha) \cos \alpha_1}, \\ \cot \varphi_2 = - \frac{(a_2 - r \cos \alpha) \cos \alpha_2 + (b_2 - r \sin \alpha) \sin \alpha_2}{(a_2 - r \cos \alpha) \sin \alpha_2 - (b_2 - r \sin \alpha) \cos \alpha_2} \end{cases}$$

oder

$$18. \begin{cases} \cot \varphi_1 = - \frac{a_1 \cos \alpha_1 + b_1 \sin \alpha_1 - r \cos (\alpha - \alpha_1)}{a_1 \sin \alpha_1 - b_1 \cos \alpha_1 + r \sin (\alpha - \alpha_1)}, \\ \cot \varphi_2 = - \frac{a_2 \cos \alpha_2 + b_2 \sin \alpha_2 - r \cos (\alpha - \alpha_2)}{a_2 \sin \alpha_2 - b_2 \cos \alpha_2 + r \sin (\alpha - \alpha_2)} \end{cases}$$

ergibt.

Also ist nach dem Obigen

$$19. \begin{cases} \frac{a_1 - \varrho}{b_1} = - \frac{a_1 \cos \alpha_1 + b_1 \sin \alpha_1 - r \cos (\alpha - \alpha_1)}{a_1 \sin \alpha_1 - b_1 \cos \alpha_1 + r \sin (\alpha - \alpha_1)}, \\ \frac{a_2 - \varrho}{b_2} = - \frac{a_2 \cos \alpha_2 + b_2 \sin \alpha_2 - r \cos (\alpha - \alpha_2)}{a_2 \sin \alpha_2 - b_2 \cos \alpha_2 + r \sin (\alpha - \alpha_2)}; \end{cases}$$

und diese Gleichungen enthalten bloss noch die zwei unbekannten Grössen ϱ und r . Bestimmt man nun ϱ , so erhält man

$$20. \begin{cases} \varrho = a_1 + b_1 \frac{a_1 \cos \alpha_1 + b_1 \sin \alpha_1 - r \cos (\alpha - \alpha_1)}{a_1 \sin \alpha_1 - b_1 \cos \alpha_1 + r \sin (\alpha - \alpha_1)}, \\ \varrho = a_2 + b_2 \frac{a_2 \cos \alpha_2 + b_2 \sin \alpha_2 - r \cos (\alpha - \alpha_2)}{a_2 \sin \alpha_2 - b_2 \cos \alpha_2 + r \sin (\alpha - \alpha_2)} \end{cases}$$

oder

$$21. \begin{cases} \varrho = \frac{(a_1^2 + b_1^2) \sin \alpha_1 + \{a_1 \sin (\alpha - \alpha_1) - b_1 \cos (\alpha - \alpha_1)\}r}{a_1 \sin \alpha_1 - b_1 \cos \alpha_1 + r \sin (\alpha - \alpha_1)}, \\ \varrho = \frac{(a_2^2 + b_2^2) \sin \alpha_2 + \{a_2 \sin (\alpha - \alpha_2) - b_2 \cos (\alpha - \alpha_2)\}r}{a_2 \sin \alpha_2 - b_2 \cos \alpha_2 + r \sin (\alpha - \alpha_2)}; \end{cases}$$

und hieraus ergibt sich die folgende Gleichung zur Bestimmung von r :

$$22. \frac{a_1 \sin \alpha_1 - b_1 \cos \alpha_1 + r \sin (\alpha - \alpha_1)}{a_2 \sin \alpha_2 - b_2 \cos \alpha_2 + r \sin (\alpha - \alpha_2)} = \frac{(a_1^2 + b_1^2) \sin \alpha_1 + \{a_1 \sin (\alpha - \alpha_1) - b_1 \cos (\alpha - \alpha_1)\}r}{(a_2^2 + b_2^2) \sin \alpha_2 + \{a_2 \sin (\alpha - \alpha_2) - b_2 \cos (\alpha - \alpha_2)\}r}.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$K_1 = \sin (\alpha - \alpha_1),$$

$$K_2 = \sin (\alpha - \alpha_2),$$

$$L_1 = (a_1^2 + b_1^2) \sin \alpha_1,$$

$$L_2 = (a_2^2 + b_2^2) \sin \alpha_2,$$

$$M_1 = a_1 \sin \alpha_1 - b_1 \cos \alpha_1,$$

$$M_2 = a_2 \sin \alpha_2 - b_2 \cos \alpha_2,$$

$$N_1 = a_1 \sin (\alpha - \alpha_1) - b_1 \cos (\alpha - \alpha_1),$$

$$N_2 = a_2 \sin (\alpha - \alpha_2) - b_2 \cos (\alpha - \alpha_2);$$

Wenn r die Länge der Seiten des Vierecks, s die Summe der Seiten, R der Radius, D der von c und d eingeschlossene Winkel bedeutet.

Wenn r die Länge der Seiten des Vierecks einen Ausdruck von $\cos F$ der ein vollständiger Ausdruck der Fläche des Vierecks enthält, so kann man diesen Fall enthält. Die Formel ist dann wie folgt gegeben.

2. Ausdruck des hyperbolischen Sektors.

Für eine Ellipse mit den Halbachsen a und b ist bekanntlich der Sektor zwischen der inneren Halbachse, dem aus dem Mittelpunkte nach einem Punkte x gezogenen Radius Vektor und dem elliptischen Bogen

$$= ab \arccos \frac{x}{a}.$$

Da nun $\frac{x}{a} = \cos \phi + \sqrt{1 - \sin^2 \phi}$, so ist für eine Ellipse mit den Halbachsen a und b $\sqrt{1 - \sin^2 \phi}$ oder eine Hyperbel mit den Halbachsen a und b der entsprechende hyperbolische Sektor

$$= ab \arccos \frac{x}{a} + \frac{b^2}{a} \phi.$$

3. Cubatur der dreiseitigen Pyramide.

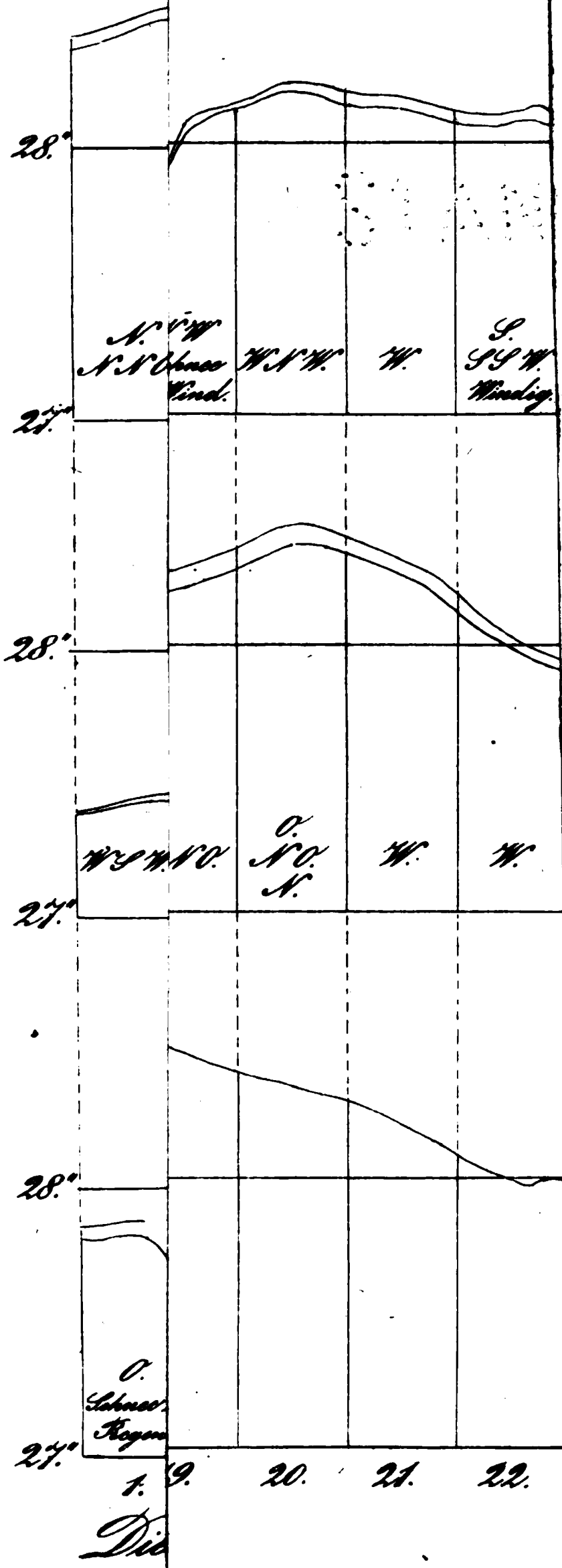
Wenn man in einem Tetraeder eine beliebige Kante in n gleiche Theile theilt, und durch die Theilungspunkte parallele Ebenen zu einer in die getheilte Kante untermittelten Dreiecksfläche des Tetraeders legt, und aus den Durchschnittspunkten der Ebenen mit Kanten Geraden parallel zu der getheilten Kante zieht, so ist der Gesamt-Cubinhalt aller dreiseitigen äußeren Prismen (durch Hilfe der Summation der Quadrate) $= F \cdot h \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right)$, wenn F die Dreiecksfläche und h die Höhe des Tetraeders auf diese Fläche bedeutet. Die Betrachtung der Gränze dieses Ausdruckes führt zum cubischen Inhalte der dreiseitigen Pyramide.

(Die Fortsetzung folgt im nächsten Hefte.)

LVI.

Miscellen.

In dem 22ten Bande des Crelle'schen Journals hat Gauss einen neuen sehr sinnreichen Beweis für das aus der sphärischen Trigonometrie bekannte, für die Geodäsie so wichtige Legendre'sche Theorem gegeben, den wir im Folgenden mit einigen uns hier nöthig scheinenden Erläuterungen mittheilen wollen.



5,05
A673
U 1

STORAGE AREA

